Programación Lineal-Método Simplex

Por D. Francisco Busquets.

Conferencia desarrollada en las Sesiones Científicas del Seminario de O. R. (Operations Research) de la Delegación de Barcelona del Instituto de Actuarios Españoles, el día 27 de febrero de 1957.

1. *La Programación Lineal como problema matemático.*

1,1. En su aspecto matemático la *programación lineal* se reduce siempre al siguiente problema:

Determinar los máximos de la función lineal de *n* variables

$$Z = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots\ldots + c_n\lambda_n \qquad [1]$$

condicionados al sistema de *m* ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{1n}\lambda_n = b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{2n}\lambda_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{mn}\lambda_n = b_m \end{array} \qquad [2]$$

llamadas relaciones o ecuaciones de *vínculo,* y a las inecuaciones

$$\lambda_j \geqslant 0 \qquad \text{para} \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad [3]$$

siendo $n > m$.

1,2. Pueden presentarse algunas variantes de dicho problema, pero en todos los casos ligeras modificaciones conducen al problema general. Tales son:

a) Determinar el *mínimo* de *Z,* en cuyo caso basta hallar el máximo de la función

$$Z = - c_1\lambda_1 - c_2\lambda_2 - \ldots\ldots - c_n\lambda_n$$

es decir, de la función lineal que resulta de cambiar los signos de los coeficientes.

b) Que alguna de las relaciones de vínculo sea una inecuación, bastando entonces introducir una nueva variable (μ), que en la función a maximizar intervendrá con coeficiente *cero* o negativo de alto valor absoluto, según los casos.

Así, por ejemplo:

$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n \leqslant b_p$$
$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n \geqslant b_p$$

se convierten, respectivamente, en

$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n + \mu = b_p$$
$$a_{p1}\lambda_1 + a_{p2}\lambda_2 + \ldots\ldots + a_{pn}\lambda_n - \mu = b_p$$

2. *Objeto de la Programación Lineal.*

2,1. La Programación Lineal tiene por objeto *buscar la mejor forma de distribución de unas disponibilidades dadas entre diversas aplicaciones posibles, dentro de un criterio de preferencia,* siempre que dicho criterio y la distribución puedan expresarse mediante ecuaciones lineales.

2,2. Uno de los problemas típicos de la programación lineal es el de Hitchcock, que puede representarse por el siguiente esquema:

Aplicaciones / Disponibilidades	A_1	A_2	……	A_q
D_1	λ_{11}	λ_{12}	……	λ_{1q}
D_2	λ_{21}	λ_{22}	……	λ_{2q}
...	......	......	......	......
...	......	......	......	......
D_p	λ_{p1}	λ_{p2}	……	λ_{pq}

Siendo λ_{hk} la cantidad de disponibilidad D_h que se destina a la aplicación A_k.

El número de variables es $p \cdot q$ y las ecuaciones de vínculo resultan de sumar las filas y las columnas del esquema. En efecto, si representamos por el propio símbolo D_h la cantidad de disponibilidad D_h y por A_k el total de disponibilidades distintas aplicadas a la aplicación A_k, las ecuaciones de vínculo serán:

$$
\begin{array}{l}
\lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots\ldots + \lambda_{1q} = D_1 \\
\lambda_{21} + \lambda_{22} + \ldots\ldots + \lambda_{2q} = D_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{p1} + \lambda_{p2} + \ldots\ldots + \lambda_{pq} = D_p \\
\lambda_{11} + \lambda_{21} + \ldots\ldots + \lambda_{p1} = A_1 \\
\lambda_{12} + \lambda_{22} + \ldots\ldots + \lambda_{p2} = A_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{1q} + \lambda_{2q} + \ldots\ldots + \lambda_{pq} = A_q \, .
\end{array}
$$

Es decir, $p + q$ ecuaciones en total, de las que una de ellas, por lo menos, es combinación lineal de las demás. Se obtienen, pues, como máximo, $p + q - 1$ ecuaciones linealmente independientes, número menor que $p \cdot q$.

(Debemos hacer observar que algunas de las relaciones, especialmente las que resultan de sumar las filas del esquema, pueden ser inecuaciones de la forma

$$\lambda_{h1} + \lambda_{h2} + \ldots\ldots + {}_{hq} \leqslant D_h$$

ya que, en muchos casos, la solución del problema no exige que se agoten todas las disponibilidades.)

Y la función a maximizar (o minimizar) será:

$$Z = c_{11}\lambda_{11} + c_{12}\lambda_{12} + \ldots\ldots + c_{pq}\lambda_{pq}$$

Como puede verse, los problemas tipo Hitchcock se caracterizan por intervenir las variables solamente con los coeficientes 1 ó 0 en las relaciones de vínculo.

Veamos algunos ejemplos de este tipo de problemas:

$$[I \mid X]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_m\\ --\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix} = I\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_m\end{bmatrix} + X\,0 = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda_m\end{bmatrix};$$

$$[I \mid X]\begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_i\\ \cdot\\ \lambda'_m\\ --\\ 0\\ \cdot\\ \lambda'_k\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_i\\ \cdot\\ \cdot\\ \lambda'_m\end{bmatrix} + \lambda'_k\begin{bmatrix}x_{1k}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{ik}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{mk}\end{bmatrix}$$

de donde, igualando y trasponiendo términos,

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 - \lambda'_1\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\\ \lambda_i - \lambda'_i\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\\ \lambda_m - \lambda'_m\end{bmatrix} = \lambda'_k\begin{bmatrix}x_{1k}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{ik}\\ \cdot\\ \cdot\\ x_{mk}\end{bmatrix}$$