uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Máster Universitario en Ciencias Actuariales y Financieras, (2017-2019).

Trabajo Fin de Máster.

“Rentas tontinas justas. Aplicación al Sistema de Pensiones como alternativa ante el riesgo de longevidad.”

David Villarino González.

Tutor/es:

José Miguel Rodríguez-Pardo del Castillo,

Jesús Ramón Simón del Potro.

Esta tesis es propiedad del autor. No está permitida la reproducción total o parcial de este documento sin mencionar su fuente. El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no se ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto.

En caso de obtener una calificación igual o superior a 9.0 (Sobresaliente), autorizo la publicación de este trabajo en el centro de Documentación de la Fundación Mapfre.

Sí, autorizo a su publicación

No, desestimo su publicación

Firmado: David Villarino González.

RESUMEN

Según estudios recientes, España será el país con mayor esperanza de vida en 2040. El aumento de la longevidad es un reto importante tanto para las aseguradoras como para los sistemas de pensiones globales, como para los propios individuos que pueden enfrentarse al riesgo de vivir más años de lo que sus ahorros permiten. Los productos actuales del mercado de vida no tienen una capacidad suficiente para contrarrestar este efecto de longevidad, por lo que existe una demanda de nuevos productos. En este trabajo, rescatamos las rentas tontinas, una forma de seguro de vida que se hizo popular hace más de tres siglos, que fue ilegalizada y que hoy traemos en forma de trabajo de final de máster como alternativa ante este escenario de incremento de la longevidad global. Estableceremos un sistema de reparto de tontinas actuarialmente justo y, siguiendo con el objetivo del trabajo, y propondremos que las tontinas sean un complemento al sistema de pensiones para garantizar un flujo de pagos constante en el tiempo para los pensionistas sin que esto tenga implicaciones sobre la solvencia del sistema.

ABSTRACT

According to recent studies, Spain will be the longest-lived country by 2040. An increasingly aging society is a major challenge for both insurers and global pension systems, as well as for individuals themselves who may face the risk of outliving their savings. New products are needed in order to address this issue, as current life products are facing many problems to counteract this effect of longevity. In this work, we rescue tontines, a form of life insurance that became popular more than three centuries ago, that was outlawed and that we bring today in the form of master's thesis as an alternative to this scenario of increasing of the global longevity. We will establish a system to distribute fair tontines, and following with the main objective of this paper, we will propose that a partial use of tontines can serve as a reliable supplement in the Spanish pension system.

Palabras Clave: Tontinas, tontinas justas, sistema de pensiones, longevidad.

Keywords: Tontines, fair tontines, pension system, longevity.

DEDICATORIA

Gracias a mis tutores por darme la oportunidad de investigar un tema tan necesario en la sociedad presente y futura como son las tontinas. Gracias a Mike por su generosidad y entera disposición para dar a conocer al mundo este tema.

Para mi padre que siempre está ahí y de quien me siento orgulloso. Sin tu apoyo, hoy no estaría escribiendo estas palabras.

Para Andre, quien desde hace siete años me acompaña y da sentido a cada una de las decisiones de mi vida, y con quien deseo compartir cada nuevo día. Gracias

DV

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

Según un estudio de la Universidad de Washington (Foreman et al., 2018), España será el primer país del mundo en esperanza de vida en 2040, con una estimación de 85.8 años vividos en promedio para un recién nacido (83.6 para los hombres y 87.4 las mujeres). Si bien esto es un dato esperanzador para la vida de las personas, supone un mayor esfuerzo de gestión de los costes de jubilación y de la asistencia sanitaria y de dependencia. Todo esto, ocurre bajo un escenario de tipos de interés en mínimos históricos, lo que nos hace enfrentarnos a un reto para generar incentivos suficientes en la contratación de los seguros de vida tradicionales.

En este trabajo, rescatamos un producto histórico como son las rentas tontinas y proponemos que sean una alternativa dado que, por definición, las tontinas carecen de garantías ya que generan pagos basados en la supervivencia al resto de miembros del grupo.

En un primer apartado, repasaremos el concepto de tontina desde su creación en Francia y veremos cómo se convirtió en el primer producto de seguro sobre la vida de las personas con un objetivo, la financiación de guerras e infraestructuras públicas, muy distinto al que proponemos en este trabajo. En este apartado, veremos dos casos de tontina y explicaremos su funcionamiento. Adicionalmente, veremos la historia de las tontinas en España, cómo en un inicio fueron un producto extensamente valorado, cómo llegarían a ser prohibidas por Ley y cómo actualmente, han vuelto a ser legalizadas, convirtiéndose este punto en una de las motivaciones para estudiar las tontinas en este trabajo de final de máster. Recopilaremos los principales fondos de tontinas que operan hoy en Europa y aprendiendo del pasado, propondremos un sistema de generación de tontinas por blockchain para eliminar la posibilidad de fraude, disminuir los gastos de mantenimiento y con esto su rentabilidad.

En el tercer apartado, veremos cómo afecta el riesgo de longevidad a los productos tradicionales y cómo las rentas tontinas son una alternativa ante este problema para las compañías de seguros y los sistemas públicos de pensiones, ya que el riesgo de longevidad es soportado por los propios asegurados. Adicionalmente, repasamos las alternativas a la cobertura de longevidad más utilizadas en el mercado y nuevas propuestas como los bonos de supervivencia, los swaps de mortalidad y los valores vinculados a la longevidad.

En el apartado cuarto, nos centramos en el estudio de las tontinas tradicionales y veremos cómo estas, a pesar de ser un producto muy popular en el pasado, no era justo desde un punto de vista actuarial, motivo por el que nuestro estudio se centrará en generar tontinas justas, esto es, que sean igualmente atractivas para todos los niveles de contribución y de diferentes edades. Este punto será la base de desarrollo de los apartados finales de este trabajo.

El apartado quinto contiene la base metodológica para la obtención de resultados. Definiremos el modelo probabilístico de mortalidad, la generación de tontinas justas y los algoritmos empleados para llegar a este fin último.

Finalmente, propondremos dos casos prácticos de tontinas justas. La primera aplicada de forma intuitiva con hipótesis básicas para entender su funcionamiento, donde veremos cómo las rentas tontinas generan pagos esperados proporcionales al nivel de inversión de cada asegurado y cómo a medida que este cumple años, va recibiendo mayores pagos al tener un mayor peso sobre el fondo. Como último ejemplo, pasaremos a proponer la tontina como complemento a la pensión pública, de tal forma que genere un doble impacto positivo; primero sobre el asegurado que tendrá un flujo de pagos constante en el tiempo, frente al caso anterior en el que en los primeros años los pagos eran prácticamente insignificantes, y por otro lado sobre la sostenibilidad del sistema de pensiones, al no recaer sobre este, el riesgo de que una persona reciba más pagos de los esperados inicialmente.

2. HISTORIA DE LAS TONTINAS Y ALTERNATIVAS

En este apartado se revisa la historia de las tontinas, desde su creación en Francia, pasando por diferentes ejemplos donde se utilizaron las tontinas ante distintas necesidades de financiación, la historia de las tontinas en España, la actualidad de las tontinas en el mundo y una alternativa de tontina bajo *blockchain*.

2.1 Lorenzo de Tonti

La idea de la primera tontina[1] fue propuesta por el banquero Lorenzo de Tonti en 1652, por quien este producto toma su nombre.

La tontina propuesta por Tonti tenía como objetivo financiar las inversiones públicas del Cardenal Mazarín de Francia, que era el responsable de las finanzas públicas en esa época, durante el reinado de Louis XIII.

La tontina inicialmente propuesta por Tonti, era un producto similar a un seguro de ahorro que paga a supervivencia. Los interesados en este producto, pagarían una cantidad única de 300 libras al gobierno, en el momento de dotación de la tontina, y serían agrupados de acuerdo a su rango de edad. A partir de este momento, el funcionamiento de la tontina sería el siguiente:

- La cantidad aportada inicialmente nunca se recuperaría, pero la tontina pagaría un cupón del 5% anual a cada grupo de edad, de la contribución conjunta hecha por sus miembros.
- Los grupos se formarían en rangos de 7 años (0-7, 8-14, etc.) hasta un máximo de 63 años.
- En el momento de inscripción de la tontina, el participante debería elegir si vinculaba su participación a su propia suerte o a la de un familiar[2].

[1] Kent Mckeever (2017) exponía recientemente que la primera tontina habría surgido en Portugal 12 años antes, y que el objetivo de esta era financiar la guerra de Restauración.

[2] Con el paso del tiempo y la inscripción de nuevas tontinas, la población interesada terminaría por encontrar la mejor forma de sacar partido a este producto, que sería vincular su contribución a la vida de una persona de corta edad, generalmente niñas de unos 5 años, las cuales ya habrían superado la edad de mayor mortalidad infantil.

- Cada año, se repartiría este cupón entre los supervivientes de cada grupo, perdiendo los fallecidos, el derecho a recibir cantidad alguna a partir del momento de su muerte.
- Este proceso acabaría en el momento en el que el último superviviente falleciera, de esta forma, finalizando la obligación contraída por el gobierno sobre la tontina.

A pesar de llevar el nombre de su inventor (Tonti), esta proposición nunca se manifestaría en la realidad al ser rechazada finalmente por el Parlamento francés (Weir, 1989). En años posteriores (1970), serían creadas hasta 200 tontinas con las mismas características y objetivos de financiación en Holanda (McKeever, 2009).

El siguiente intento de tontina en Francia, esta vez desarrollado con éxito, llegaría ya en 1689 bajo un escenario político muy distinto, acuciado el gobierno francés por la necesidad de financiación para la llamada Guerra de los Nueve Años. En este caso, se dotaría una tontina valorada en 110 millones de libras, gracias a la contribución de 110.000 miembros (Lange, List y Price, 2007).

Según este mismo autor, en Reino Unido, era habitual la financiación de grandes obras de infraestructura pública mediante tontinas, tales como el puente de Richmond, el puente inglés más antiguo aún en pie. En Estados Unidos, el uso que se daría a las tontinas sería principalmente de financiación de deuda pública.

A medida que las tontinas se hacían más populares y se conocía mejor su funcionamiento, empezaron a generarse organizaciones que trataban de lograr que las tontinas durasen el mayor tiempo posible activas, esto es, generando pagos a sus beneficiarios durante más tiempo. Un ejemplo nombrado en McKeever (2009) es el "club de inversores" creado en Irlanda en 1777, que se apoyó en estudios de longevidad sobre la población local, para localizar a aquellas familias con mayor longevidad esperada, tras lo que vincularían sus participaciones en múltiples tontinas sobre la vida de 50 niñas de entre tres y siete años[3]. Otros ejemplos de participaciones "trucadas" vistas durante la realización de este estudio, serían la vinculación del fondo, a la vida de la realeza, tal como el rey George III que, a pesar de tener 50 años por aquel entonces, viviría hasta los 81.

[3] Como curiosidad, 40 años más tarde, el 64% de la muestra seleccionada por este grupo seguiría viva, frente al 42% del resto de la población inscrita en las tontinas con la misma edad.

2.2 La tontina de Alexander Hamilton

Un caso de interés para este trabajo puede ser encontrado en Jennings, Swanson y Trout (1988). La tontina fue propuesta por el secretario del Tesoro Público de Estados Unidos en 1790, Alexander Hamilton, que se basó en una idea similar a la del banquero de Tonti, con la salvedad de que en este caso se podrían dar múltiples participaciones de 200 dólares americanos y otras características que serán comentadas en los siguientes párrafos.

Esta tontina, que tenía como objetivo la financiación de deuda pública, pretendía ser un producto atractivo para sus participantes, pero además, basarse en un modelo sostenible para las arcas públicas, que no generase una carga excesiva de pagos futuros. Hamilton propuso que la tontina dejase de pagar cuando hubiera fallecido el 80% de los miembros, lo cual limitaría el riesgo por longevidad del último miembro en fallecer y por tanto los pagos a realizar durante un número de periodos más elevado. No obstante, esto no impediría que el fondo estuviera compuesto por niños en su mayoría, ya que Hamilton entendía que aquellos partícipes de mayor edad no estarían dispuestos a entrar en el fondo bajo su propia suerte, por lo que todos ellos nombrarían a un familiar de menor edad como beneficiario. Este detalle se solventaría generando incentivos a la inscripción de personas adultas mediante la aplicación de tramos de edad a los que pagaría un mayor tipo de interés (figura 1). Con todo esto, Hamilton crearía una tontina que si bien, en los primeros años estaría generando mayores cargas para el Estado en forma de cupones más altos, a medida que los grupos de mayor edad fueran abandonando el colectivo, las cargas irían

Figura 1: Tontina propuesta por Alexander Hamilton (1790). Tramos de interés.

Clases	Tipo de interés
1. "Menores de 20 años"	4.200%
2. "Entre 20 y 30 años"	4.325%
3. "Entre 30 y 40 años"	4.500%
4. "Entre 40 y 50 años"	4.825%
5. "Entre 50 y 60 años"	5.350%
6. "Mayores de 60 años"	6.400%

Fuente: Citado en Jennings, Swanson y Trout (1988) como; "Harold C. Syrett et al., eds., The Papers of Alexander Hamilton, VI (New York, I962), 95. See also J. J. Grellier, The History of the National Debt from the Revolution in i688 to the Beginning of i8oo. . . (London [i8I0]), 353-354.".

disminuyendo hasta llegar a un punto en que buena parte de las participaciones del fondo habría desaparecido y el Estado se desharía de sus obligaciones con la tontina una vez llegado a un 20% de supervivientes sobre el número inicial de participantes.

Hamilton menciona en varias ocasiones el valor actual de los pagos futuros, por lo que es consciente de que a medida que pasan los años, los pagos provenientes de la acumulación de tipos de interés son más insignificantes. Esto sumado a que los impuestos sobre este producto eran de aproximadamente un 25% Jennings, Swanson y Trout (1988), la tontina propuesta por Alexander se habría convertido en un producto muy rentable para las arcas públicas estadounidenses.

La única excepción a la buena base teórica de Hamilton, y que haría que su tontina fuera mucho más costosa de lo esperado para el Tesoro público, fue que no estaba familiarizado con los cálculos actuariales. Tal y como se puede ver en el documento de Jennings (1988), sus tablas de mortalidad erraban en las expectativas de supervivencia poblacional ya que consideraba muestras muy pequeñas en sus cálculos. Un ejemplo son sus cálculos de supervivencia a los 91 años, diciendo que, de un grupo de 24 personas, ninguna sobreviviría a esta edad. El error que cometería entonces, es que, si bien pudo haber sido un cálculo acertado para su grupo, al extrapolarse esto a la población real, se vería cómo muchos sobrevivirían hasta más de los 95 años. Esto haría que el momento en que la tontina hiciera su último pago, se diera mucho más tarde de lo esperado por sus tablas de mortalidad.

2.3 Tontinas en España

Tradicionalmente, en España se ha diferenciado entre las propias tontinas a las que nos referimos a lo largo de este trabajo, pero también a las rentas Chatelusianas desarrolladas por Frederic Chatelus en 1880[4]. Tal y como se define en el Reglamento Definitivo de Seguros de 1912 (art. 42), este producto se diferencia de las tontinas en que “el capital se conserva y se acrece indefinidamente con las aportaciones nuevas y solo se distribuye la renta a los que cumplen determinadas condiciones”. También son definidas las rentas mixtas que tendrían la particularidad de repartir la renta durante cierto periodo, para

[4] Más información sobre Frederic Chatelus en http://maitron-en-ligne.univ-paris1.fr/spip.php?article78955&id_mot=180

Figura 2: Chatelusiana "Los Previsores del Porvenir" entre 1904 y 1944.

Fuente: Tortella, Ortiz-Villajos y García Ruiz (2011).

finalmente repartir adicionalmente el capital a los superviventes. En el art. 45 de este mismo Reglamento, se definirían algunas características como que el periodo de acumulación de las tontinas sería de entre 10 y 20 años, o la prohibición a que estas garanticen un rendimiento a sus miembros[5].

Según Illescas (ver en Hellwege, 2018), las primeras tontinas en España datan de mitad del siglo 19, cuando se formarían hasta 10 tontinas, entre las que cabe destacar "El porvenir de las Familias" (1851), "El Montepío Universal" (1856) o la posterior chatelusiana "Los Previsores del Porvenir" (1904) que se mantuvo activa durante 4 décadas y sobre la que se fundaría el Banco Popular de los Previsores del Porvenir (Tortella, Ortiz-Villajos y García Ruiz, 2011).

El establecimiento de estas tontinas estaba recogido por el Código de Comercio de 1829. Y aunque desde un inicio, expone Illescas que estas tontinas solían terminar en escándalos, insolvencias e incumplimiento de pagos, fueron los únicos productos que podrían asemejarse a un seguro de vida como tal, hasta que en 1869 una nueva Ley[6] permitiera la creación de productos de seguro entre los que se incluirían los de vida. Fue en ese momento cuando las tontinas comenzarían a perder su atractivo en España ante las

[5] Esto es comprensible, ya que el rendimiento viene dado por cuántos años viva el fondo en promedio. Garantizar un rendimiento para cada individuo, significa en otras palabras garantizar el fallecimiento de sus miembros.

[6] Ley de 18 de octubre de 1869, declarando libre la creación de Bancos territoriales, agrícolas y de emisión y descuento y de sociedades de crédito y demás asociaciones que tengan por objeto cualquier empresa industrial o de comercio.

nuevas alternativas de seguro. En 1885 el Código de Comercio, aún vigente hoy en día, mencionaría de nuevo a las tontinas en su artículo 124 (BOE-A-1885-6627, de 01 de 01 de 1886), dejándolas fuera de su competencia como sociedades mercantiles, salvo en las excepciones "de actos de comercio extraños" y en caso de que se conviertan en "sociedades a prima fija".

Tres décadas después, nacería la Ley de Seguros de 1908, que tendría en cuenta a las rentas tontinas y chatelusianas, reforzada por el Real Decreto de 1912 en sus artículos 42 a 47, donde define la forma de proceder de estas y establece sus límites. Esta situación llegaría en un momento en el que los fondos de tontinas y chatelusianas estaban perdiendo interés en el mercado asegurador español, dadas sus bajas rentabilidades generadas. Las estadísticas dicen que esta situación conseguiría reactivar el mercado, ganando las tontinas, 4 puntos porcentuales de cuota de mercado dentro del mercado de seguros de vida como se puede ver en la figura 3**.**

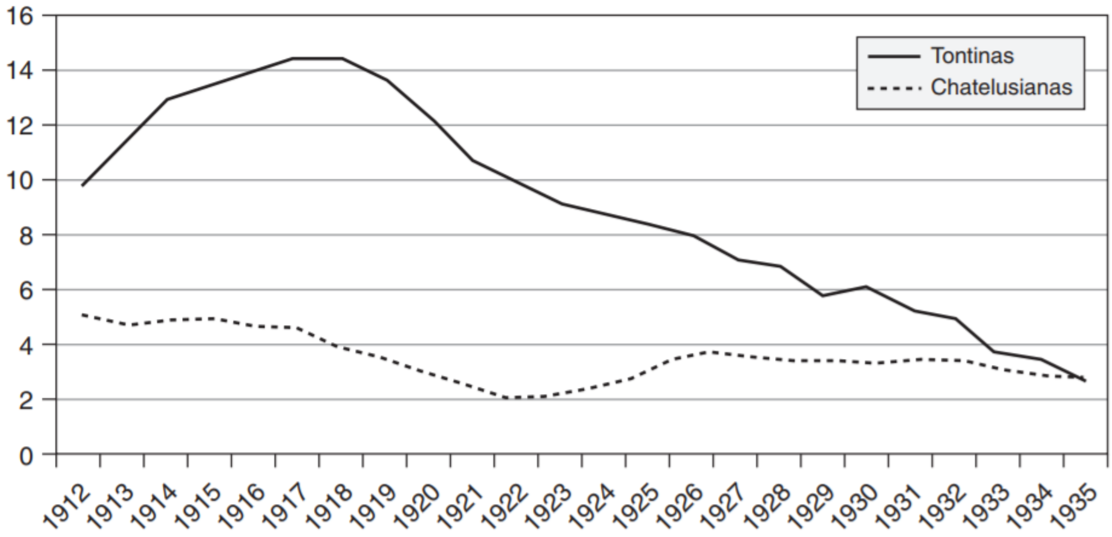
En 1926, los párrafos 6º y 7º del art. 4 del Real decreto-ley de 9 de abril, prohibirían la constitución de nuevas entidades tontinas y chatelusianas en España, tanto la fundación, administración y gestión de estas, como para la creación de delegaciones y sucursales de entidades extranjeras tontinas y chatelusianas. En este momento, ya se había empezado a percibir la caída de cuota de mercado de los fondos estudiados, que al prohibirse la suscripción de nuevas entidades, a los problemas comentados dos párrafos antes y sumado a la irrupción de nuevos productos de seguro, terminarían por llevarlas a caer hasta cuotas del 3% en 1935.

Adicionalmente, en 1944 (Ley de 25 de noviembre, artículos 1 a 9), alarmados por la decreciente rentabilidad de las renta chatelusiana de la figura 2, que llegaba a generar rendimientos negativos a sus pensionistas a partir de 1948[7], se termina por prohibir (art. 1) la nueva incorporación de miembros a la asociación chatelusiana "Los Previsores del Porvenir", que como hemos dicho, era la mayor y por aquel entonces la única activa, dando a sus asociados la opción a ejercitar antes del 1 de abril del año siguiente, para continuar en el régimen chatelusiano, transformar sus rentas de régimen chatelusiano en

[7] Siguiendo la tónica de otros países europeos como Italia donde ya habían sido prohibidas o en Francia donde la asociación fundada por el propio Chatelus había sido transformada hacia otros productos de seguros.

otras de seguro aprobadas para la entidad[8] –que como se ha comentado, sería un precedente a la creación del Banco Popular-, o adicionalmente, la posibilidad de rescate en base a unas tablas que informaban (art. 4) del pago por cuota inscrita en cada año de la vida del fondo chatelusiano[9].

Figura *3*: Cuota de los ramos de vida (tontinas y chatelusianas, en el total de primas recaudadas 1912-1935 (porcentajes).



Fuente: Tortella, Ortiz-Villajos y García Ruiz (2011).

Tras las distintas prohibiciones sobre estos fondos y la pérdida prácticamente total de cuota de mercado sobre el ramo de vida en los años 40, se podría pensar que las entidades de tontinas y chatelusianas llegaron a su fin. En parte fue así, ya que no hemos encontrado en la realización de este estudio, literatura sobre tontinas en España hasta la actualidad. Sin embargo, las tontinas volverían a nombrarse recientemente en la Ley 20/2015, de 14 de julio, de ordenación, supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras, que transpuso al ordenamiento jurídico español, aquellas disposiciones de la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio. En el anexo de esta Ley 20/2015, se enumeran todas las formas en que puede dibujarse el ramo

[8] Según el artículo 3 de esta Ley de 1944, el tipo de seguro sería el de "Pensión y ahorro garantizados".

[9] Así, por ejemplo, para aquellos inscritos en el fondo en el año 1943, se daría un pago de 12 pesetas por cuota suscrita y por año de transcurso desde la inscripción.

de seguro de vida, y es ahí donde en su punto 4 aparecen las operaciones tontinas, por tanto, de nuevo legalizadas en España:

"Las operaciones tontinas, entendiendo por tales aquellas que lleven consigo la constitución de asociaciones que reúnan partícipes para capitalizar en común sus aportaciones y para repartir el activo así constituido entre los supervivientes o entre sus herederos."

Unos meses más tarde, el artículo 150 del Real Decreto 1060/2015 de 20 de noviembre, de ordenación supervisión y solvencia de las entidades aseguradoras y reaseguradoras, regularía el capital de solvencia para las tontinas, que es del 1.05% del activo de estas asociaciones.

2.4 Tontinas en la actualidad

La repercusión de esta Directiva europea, ha sido tal, que se puede establecer cierta relación entre su aparición y la reciente oleada de nuevos estudios sobre rentas tontinas, al menos es una de las motivaciones para la realización de este trabajo. En adelante, veremos cómo han evolucionado las tontinas hasta la actualidad, centrándonos en este tipo de operación, ya que hemos podido contrastar que las de tipo chatelusiano no son de relevancia hoy en día.

Como se ha visto en apartados anteriores, las tontinas aparecieron como una de las únicas alternativas frente a las necesidades de financiación y se utilizarían además, como un componente de seguro hasta que fueran desbancadas por otros productos en todo el mundo. Esto es cierto en una gran parte del globo, si bien, hemos podido encontrar economías en las que las tontinas no llegaron a desaparecer, e incluso, son una parte importante del sistema de ahorro.

En Francia, las tontinas son un producto que ha resistido al paso del tiempo, datando de 1844 la creación de Le Conservateur[10]. Ofrecen tontinas por un periodo de 10 a 25 años si se desea recibir un capital a vencimiento y de 12 a 25 años si se desea recibir el rendimiento en forma de renta. Es interesante, que si bien, como hemos comentado, las tontinas no pueden garantizar un rendimiento, ofrecen un plan de protección al asegurado

[10] Se puede ver más información sobre esta empresa en https://www.conservateur.fr/nos-produits/tontine/

mediante seguros de vida, por lo que, en caso de fallecimiento, la pérdida no es total sobre el capital aportado. En Francia son interesantes las tontinas por las ventajas fiscales, ya que las sumas que se aportan, son deducidas hasta ciertos límites establecidos por el PASS[11] de la Seguridad Social de Francia.

En Europa, se dan actualmente otros tipos de fondos de tontinas, como en Suiza, donde el sistema de pensiones privado de SwissAir tiene un fondo acumulado de 1,764 millones de Francos Suizos para un total de 3,428 miembros[12].

En Suecia, las tontinas son un complemento a las cuentas nocionales. En estas cuentas se va acumulando la parte de los balances que dejan aquellos cotizantes fallecidos, no importando si han llegado o no a la edad de jubilación. Cuando un pensionista llega a la edad de jubilación, se calcula cuál es su esperanza de vida en ese momento utilizando tablas de experiencia poblacionales, y en función a esto, se le adjudicará una renta vitalicia[13].

Si bien no existe una amplia variedad de tontinas en el mundo, sí que se dan varios casos en Estados Unidos donde existen dos grandes tontinas; TIAA con un fondo acumulado de 900.000 millones de dólares y otra por parte del Estado de Wisconsin con más de 85.000 millones de dólares y 410.000 miembros. En Japón se creó en 2017 un fondo como parte de una cartera con trece tipos de productos de seguros de vida y que ya acumula más de 50.000 miembros[14].

2.5 Blockchain

Cada vez que se llegaba a una ventana de pago de la tontina, los trámites a realizar eran costosos en tiempo. Según el Real Orden de 8 de agosto de 1924, los pasos a seguir eran los siguientes: primeramente, las entidades gestoras de las asociaciones tontinas tenían la obligación de notificar a cada uno de los miembros participantes en el fondo, mediante

[11] Más información sobre los límites de cotización de la Seguridad Social de Francia en https://www.net-iris.fr/indices-taux/social/3-plafond-securite-sociale

[12] Reporte anual 2018 de SwissAir en www.swissair-group-pensions.com

[13] OECD (2016), Pensions at a Glance 2017: Country Profiles – Sweeden. Disponible en: https://www.oecd.org/els/public-pensions/PAG2017-country-profile-Sweden.pdf

[14] Existe un repositorio donde se señalan todos los proyectos relacionados con tontinas y que puede ser consultado en: rhttps://docs.google.com/spreadsheets/d/1sXEGN-vvMDCjkZo07qYu6ZktAzVyIkR_6H7MDxTl4aA/edit#gid=2042362895

carta y en un plazo posterior a la fecha de pago de 30 días. Tras esto, los participantes debían enviar un certificado de sobrevivencia como justificación de que eran candidatos a cobrar su parte. En caso de no comunicar en su debido tiempo, su estado de elegible para el reparto, el miembro quedaría automáticamente fuera de la tontina y perdería su derecho al cobro de la renta.

Esto no hacía más que dificultar los cobros de esta renta, generando burocracia innecesaria en cada año de pago, con el coste de tiempo y dinero que esto conlleva. Se abrían multitud de opciones para el fraude, ya que bien la propia entidad gestora podría no notificar el pago a tiempo[15], por lo que los miembros de la tontina perderían su derecho de cobro, o bien los propios asegurados podrían falsificar los certificados de sobrevivencia necesarios para el cobro de la renta.

Una alternativa a estos trámites, que no harían otra cosa que desincentivar la creación de tontinas, podría ser la vinculación de los contratos a la tecnología blockchain. Todos los miembros de la tontina, tendrían un contrato inteligente generado mediante la tecnología blockchain, dotando al sistema de mayor transparencia y agilidad en los trámites. Este sistema, habría de estar conectado con los sistemas de los centros de atención e información de la Seguridad Social (CAISS), para que, en caso de fallecimiento del miembro, se comunicase ágilmente su estado, previniendo la posibilidad de falsedad de documentos o fraude.

Las tontinas, adicionalmente, son productos atractivos por sus bajos costes, ya que no existe la necesidad de que una aseguradora realice gestiones más allá que el propio pago de las rentas, y tampoco son productos sobre el que haya que cobrar una prima de riesgo, ya que, como veremos, el riesgo de mortalidad está plenamente soportado por la parte contratante. La tecnología blockchain cumple con generar procesos automatizados y por tanto menos costosos que la vía burocrática tradicional[16].

[15] En cuyo caso se enfrentaría a la multa prevista en el artículo 34 de la ley de 14 de mayo de 1908.

[16] Willis Towers Watson (2016), ¿Cómo influirá el Blockchain en los seguros? Disponible en: https://willistowerswatsonupdate.es/ciberseguridad/como-afectara-el-blockchain-a-los-seguros/

3. ALTERNATIVAS A LAS RENTAS TONTINAS

En este apartado veremos las alternativas a las rentas tontinas, primero como producto de seguro de vida, por lo que las compararemos con las rentas vitalicias al ser similares en cuanto al ámbito de actuación en el que operan, y finalmente, como cobertura ante el riesgo de longevidad para las compañías. En este último caso, se hará un repaso de las formas que toma esta cobertura, como los swaps de mortalidad, los bonos por supervivencia o los valores vinculados a longevidad.

3.1 Tontinas contra rentas vitalicias

Los productos de seguro de vida tradicionales, como las rentas vitalicias, están basados en que el riesgo de longevidad de los asegurados, sea trasladado a la aseguradora, la cual apenas tiene mecanismos suficientes, como veremos en el apartado siguiente, para cubrirse de este riesgo de que sus asegurados vivan más años de los esperados por sus tablas de mortalidad. Por ejemplo, la mejora de la longevidad valorada, se puede dar por errores de estimación de las propias aseguradoras o gracias a nuevas tecnologías que afecten al mercado, tales como una nueva cura contra el cáncer. Por este motivo, estos productos habitualmente están recargados con primas de riesgo que contemplan esta situación. De esta forma, los asegurados se encuentran con productos excesivamente recargados y por tanto, poco eficientes y atractivos.

Una de las ventajas de las rentas tontinas frente a estos productos tradicionales, es que este "riesgo" de mayor longevidad, es soportado por el propio individuo, por lo que se convierte en un producto mucho más barato al no existir la necesidad, por parte de la aseguradora, de recargar en el precio a este producto.

Cabe señalar, por otra parte, que a cambio, todo el riesgo es soportado por el propio individuo y en caso de que todos los miembros vivan más años de los esperados, los pagos futuros se verán menguados. Esto puede generar situaciones en las que los pagos por mortalidad de las tontinas sean muy volátiles, por lo que el componente de seguro puede estar en peligro en algunos casos, según explica Weinert (2017).

3.2 Otras alternativas de cobertura del riesgo de longevidad

Varios han sido los mecanismos de cobertura contra el riesgo de longevidad propuestos en los últimos años, si bien, ninguno de ellos ha conseguido extenderse en el mercado asegurador como una alternativa eficiente, que disminuya el coste adicional que hasta ahora soportan los asegurados mediante aumentos de la prima de riesgo que pagan por sus seguros. Los más habituales son la cobertura mediante la cesión del riesgo a una reaseguradora, por lo que se da una sustitución del riesgo de longevidad por el riesgo de crédito de esta, y la cobertura mediante activos financieros en compañías que se beneficien de este aumento en la longevidad, como pueden ser las farmacéuticas. En este apartado, vemos varios ejemplos de productos propuestos, no tan populares, para hacer frente a la cobertura de este riesgo.

- **Swap de mortalidad.**

Al igual que en un swap de tipos de interés por el que las partes se intercambian un tipo de interés fijo por un tipo de interés variable referenciado, por ejemplo, al EURIBOR, en este caso, las dos partes del contrato intercambiarán una serie de pagos fijos por otros de tipo variable y que dependerán del número de supervivientes en una cartera dada. Han sido varios los ejemplos de swaps de mortalidad, como el propuesto por Cairns, Blake y Dowd (2008), el primer swap de mortalidad contratado en 2007 entre Swiss Re y Friends' Provident en Reino Unido, que trataba de ser un contrato para la cobertura del riesgo de longevidad. En este caso el swap estaba vinculado a una cartera de rentas vitalicias de casi 2.000 millones de libras. Swiss Re se haría cargo del riesgo de longevidad de los asegurados en esa cartera, a cambio de una prima constante pagada por la aseguradora Friend's Provident.

Otros ejemplos son los índices propuestos por Credit Suisse (ya desaparecido) y Deutsche Börse[17], basados en la esperanza de vida al nacimiento de diferentes cohortes. De esta forma, estos índices, diferentes al ejemplo anterior en cuanto a que se tratarían de productos financieros y no a un contrato de seguros, convertirían las expectativas de supervivencia de las carteras en activos financieros.

[17] http://www.longevity-risk.org/Pres_Rogge%20%26%20Sachsenweger.pdf

- **Bonos de supervivencia.**

Nos basamos en el ejemplo también propuesto en Cairns, Blake y Dowd (2008), que habla del bono propuesto por el Banco de Inversión Europeo en 2004. Este bono pretendía cubrir la longevidad de varios fondos de pensiones de Reino Unido por un periodo de 25 años. Este bono pagaría inicialmente un cupón de 50 millones de libras y durante el periodo de cobertura vincularía el resto de cupones al porcentaje de supervivientes en el fondo. Inicialmente el bono sería absorbido por BNP Paribas, pero a su vez sería reasegurado por PartnerRe, convirtiendo este bono en un activo financiero compuesto por un swap de mortalidad y un swap de tipos de interés. Finalmente, este bono de supervivencia no llegaría a buen puerto al no conseguir atraer a suficientes inversores.

Adicionalmente, Blake y Burrows (2011) proponen que los gobiernos locales ofrezcan bonos de supervivencia como cobertura ante el riesgo de longevidad. Otros riesgos tienen mecanismos de cobertura de amplio uso en el mercado asegurador (meter aquí ejemplos vistos con Pablo cuerno, riesgo de nivel, etc). El autor propone que para el riesgo de nivel se da la cobertura con renta fija, mientras que, en caso de rentas vinculadas a índices de mercado, la cobertura natural sería comprar bonos sobre ese mismo índice. En cuanto al riesgo de longevidad, no existe un mecanismo natural de cobertura, para casar con activos las obligaciones de pago futuros a los clientes, motivo por el cuál, proponen este bono de supervivencia.

- **Valores vinculados a longevidad.**

Este producto funciona de forma similar al anterior, si bien, estará vinculado a unas tasas de mortalidad previamente estipuladas por la parte oferente del contrato. Las tasas hacen referencia a las de experiencia para la compañía oferente y el funcionamiento es similar al anterior. Si las tasas de mortalidad en periodos posteriores son inferiores a las de experiencia en el momento de la creación del producto, esto se traducirá en un rendimiento para la parte compradora. Por su parte, la parte oferente, recibirá un pago inicial que invertirá en bonos AAA bajo diferentes duraciones para garantizar los pagos futuros de cupones o en caso de que sus tasas de mortalidad de experiencia en posteriores años fueran inferiores a las iniciales sobre las que se vinculó el producto.

4. TONTINA TRADICIONAL VS TONTINA JUSTA

4.1 Tontina tradicional.

En el momento de la creación del fondo, todos los miembros (digamos que en este ejemplo la tontina será formada por cuatro miembros), harán una aportación inicial de tres mil euros. Cuando uno de estos miembros fallezca, su derecho sobre el fondo pasará a repartirse entre los otros tres supervivientes (4 – 1), que recibirán una parte proporcional de estos 3,000€, esto es, 3,000€ / 3 supervivientes = 1,000€ por persona.

El nuevo balance de cada uno de los miembros supervivientes tras el primer fallecimiento, será de 3,000€ + 1,000€ = 4,000€. Si bien, los miembros que aún viven, pueden decidir cobrar esta ganancia por supervivencia al fondo, que será su rendimiento de este producto (asumiendo que el capital no crece a un rendimiento de mercado y la inflación es cero).

Tras el segundo fallecimiento, el siguiente flujo monetario se dará bajo las mismas condiciones, tras un nuevo deceso de uno de los miembros del fondo, que en este caso, repartirá su contribución inicial de 3,000€ entre 2 miembros, con una ganancia por cabeza de 1,500€, y este proceso continuará hasta que quede una sola persona viva en el fondo, que se hará con la contribución inicial del último fallecido, esto es, con los 3,000€ íntegros.

Este proceso continuará, hasta que únicamente quede un miembro vivo, que finalmente se hará con la contribución total de todos ellos, esto es, su aportación inicial de 3,000€ y los 3,000€ * 3 = 9,000€ de los otros tres.

Formalmente se define:

En t = 0, todos los miembros m ∀ i=1,…,M, de la tontina aportan una cantidad de s unidades monetarias.

Cuando uno de los i miembros fallece, todos los demás reciben una cantidad proporcional. Después del primer fallecimiento, cada miembro recibirá $\frac{s}{m-1}$, tras el segundo fallecimiento, cada miembro recibirá $\frac{s}{m-1}$ y así sucesivamente hasta que fallezca el último miembro.

Si el número "m" de miembros es suficientemente grande, se producirá un número de muertes cercanas a lo esperado por la probabilidad de fallecimiento de cada edad[18], de forma constante a lo largo de la vida del fondo, por lo que este producto será capaz de generar un flujo de pagos de por vida a los miembros del fondo, por lo que se

Podemos observar, que los pagos dependen únicamente de la cantidad inicial aportada, que es la misma para cada miembro, y de si el individuo i está vivo en el momento del pago.

Por una parte, aquellos miembros de mayor edad del fondo, tienen pagos esperados menores debido a que su probabilidad de fallecimiento es más alta, por lo que, recibirán menos pagos esperados futuros. De esta forma, la tontina tradicional no resulta un producto justo si el fondo está formado por personas de distinta edad, siendo necesario por tanto, formar tantos fondos de tontinas como individuos con distintas edades haya. Esto genera desincentivos hacia la creación de fondos de tontinas de mayores tamaños, reduciendo así la capacidad de generación de flujos constantes de pagos.

Dicho de otra forma, debido a que este producto requiere del fallecimiento de otros miembros para generar pagos a los miembros supervivientes, la tontina se convertiría en un producto en el que inicialmente no se darían pagos al ser la probabilidad de fallecimiento vinculada a la edad de todos los miembros muy baja, por lo que otros productos tradicionales, como los productos de rentas, captarían la atención de los ahorradores que quieran mantener una corriente de flujos más equilibrada.

Por otro lado, la cantidad "s" a aportar al inicio del periodo (t = 0) es la misma para todos los miembros, por lo que también genera desincentivos a aquellos individuos con rentas más altas, cuya inversión en el fondo podría ser menor de lo esperado. Aumentando esta cantidad, podríamos estar perdiendo el objetivo de vista, de tener la tontina como una alternativa frente a la jubilación. Adicionalmente, se observa que el número de miembros en el fondo (m), disminuye hasta que desaparece el fondo, lo cual priva a otros miembros de entrar una vez que el fondo está formado.

[18] Basándonos en el teorema central del límite, a medida que el tamaño del fondo se haga más y más grande, el número de fallecimientos se acercarán más y más a lo esperado por las probabilidades de fallecimiento realistas del conjunto (unas probabilidades de fallecimiento estimadas con total certeza).

Sabin (2010), propone que esta tontina es injusta, tanto para todas las edades de los distintos individuos como para todos los tipos de rentas, generando desincentivos para el total de los integrantes del fondo. Si el fondo estuviera formado por miembros con características heterogéneas, veríamos que aquellos con aportaciones iniciales menores, se verían de cierta forma financiados por los más ricos, y por otro lado, los miembros más jóvenes, con mayores pagos esperados futuros, serían financiados por los miembros de mayor edad.

4.2 Hacia una tontina actuarialmente justa

Las tontinas tradicionales que hemos venido tratando en los primeros puntos de este trabajo, con la idea por bandera de que aquel individuo que más tiempo pertenezca vivo en el colectivo acumule el capital del resto, bien podrían haber sido inventadas bajo la teoría evolutiva de Charles Darwin, como un producto descriptivo de la selección natural. De esta forma, solo siendo partícipes de los mayores cobros, aquellos miembros con mejores características genéticas, "the survival of the fittest" (la supervivencia del más apto).

A pesar de que es un producto fácil de entender para los participantes siendo clara su forma de proceder, este tipo de producto no es interesante para la mayoría de los miembros del fondo, ya que no es actuarialmente justo[19]. Como se ha visto anteriormente, la tontina empezaría a perder interés popular a medida que fueron apareciendo otros productos de seguro que garantizaban pagos constantes a lo largo de toda la vida de los asegurados, incluso garantizando estos pagos en caso de longevidad mayor que la esperada.

Es interesante continuar unas líneas sobre este concepto de "pagos constantes incluso en caso de longevidad superior a la esperada", ya que, si criticamos a las tontinas tradicionales por no ser actuarialmente justas, deberíamos cuestionarnos si el resto de productos lo son. Según Milevsky et al. (2018) la mayoría de rentas vitalicias no están suscritas bajo la mentada justicia actuarial, ya que, en su mayoría, las rentas vitalicias

[19] Donelly (2018) define como renta actuarialmente justa, aquella cuyos pagos esperados iguala a las contribuciones aportadas por cada miembro.

tienen recargos por varios riesgos entre los que se encuentra el de longevidad. De hecho, la existencia de este riesgo, es uno de los motivos por el que se realiza este estudio.

La diferencia más notable entre el riesgo de mortalidad y el de longevidad, es que, en el primero, la incertidumbre se encuentra en el momento del fallecimiento, no sabiendo si se dará antes o después en el tiempo, si bien, conocemos a ciencia cierta cómo se distribuye la mortalidad de nuestra población. Haciendo uso de la ley de los grandes números, este riesgo será fácilmente diversificable y su demostración es sencilla. Sin embargo, el mayor problema se da ante el riesgo de longevidad, que no es como tal, el riesgo de que una persona sobreviva durante un periodo mayor, ya que ese componente sí sería diversificable de la misma manera que en el caso de la mortalidad, sino más bien, el riesgo de que la distribución de la supervivencia de mi población no sea conocida. Este es un resultado a tener en cuenta, ya que la tendencia en los últimos años es que la longevidad mejore constantemente hasta que España se convierta en el país más longevo del mundo (Foreman et al., 2018).

La importancia de generar un producto basado en la formación de grupos que compartan el riesgo de mortalidad, es que efectivamente, no se considera a la tontina como un seguro como tal, ya que esta no garantiza pagos bajo ningún concepto[20]. En caso de que el fondo no sea actuarialmente justo, una parte de los miembros tendrían pagos esperados por debajo de su contribución real y los otros, tendrían pagos superiores a lo contribuido. En otras palabras, unos miembros estarían subvencionando al resto. Es por esto, que la tontina debe basarse en la justicia actuarial para ser atractiva para todo tipo de miembros.

Todos los productos (rentas vitalicias, tontinas) tienen algo en común y es que tratan de cubrir a las personas, del riesgo de quedarse sin una fuente de ingresos en su jubilación

[20] Si el asegurado fallece antes de llegar a la ventana de prestaciones, la tontina no generará ningún. Así mismo, si llegado el periodo de pagos, no se da ningún fallecimiento, tampoco recibirán pagos por la mortalidad de otros miembros

5. METODOLOGÍA

En este apartado se define la base teórica utilizada para la extracción de resultados en el último punto de este trabajo de final de máster.

A lo largo de los primeros puntos del trabajo, se ha encontrado el lector con varios ejemplos de tontinas, las cuales tenían en común que no eran justas una vez que se mezclaban miembros de distintas edades y aportaciones al fondo. Como se ha explicado anteriormente, esto se debe a que las tontinas históricas repartían sus rendimientos de forma proporcional al número de miembros vivos, sin importar si estos hubieran aportado una mayor cantidad de dinero al fondo o si algunos miembros tuvieran una edad mayor y por tanto, sus pagos esperados fueran menores que los de otros miembros con menor edad, los cuales tendrían unas expectativas de supervivencia mayores.

Sabin (2010) propone una solución a estas tontinas, de forma que estas fueran justas para todos los miembros. Esto es, aquellos miembros de mayor edad, y por tanto, con menores probabilidades de supervivencia, deberían recibir una mayor proporción de los pagos por el fallecimiento de otros miembros. De la misma manera, los miembros que mayores aportaciones iniciales hubieran hecho al fondo, deberían asimismo, recibir una cantidad mayor.

Esta solución, fue denominada por este autor como *fair transfer plan* (FTP), resumiendo en su nombre la idea de que, mediante la asignación de pesos, se generaría una alternativa de tontina justa para todos los miembros del grupo, una vez que se tuviera que realizar el reparto de las contribuciones de los fallecidos.

5.1 Modelo probabilístico de tablas de mortalidad

En este apartado se definen las bases del modelo de mortalidad elegido. Las tablas de mortalidad elegidas para hombre y mujer son las PASEM 2010 **(**figura 4), elaboradas a petición de UNESPA sobre la población aseguradora española[21]. La elección de estas tablas no es de gran importancia para la realización de este trabajo, si bien, han sido

[21] Más información sobre estas tablas puede ser encontrada en https://unespa-web.s3.amazonaws.com/main-files/uploads/2017/06/Tablas-mortalidad-PASEM2010.pdf

Figura 4: Muestra de la tabla de mortalidad PASEM para mujer y hombre.

Edad	Mujer	Hombre	Edad	Mujer	Hombre
0	0.004744	0.005807	30	0.000277	0.000767
1	0.000376	0.000418	31	0.000301	0.000755
2	0.000307	0.000349	32	0.000328	0.000755
…	…	…	…	…	…
45	0.001586	0.002439	60	0.004801	0.009793
46	0.001707	0.002727	61	0.00503	0.01035
47	0.00185	0.003048	62	0.005293	0.010892
…	…	…	…	…	…
100	0.531667	0.5268	111	0.973152	0.9876
101	0.559229	0.58387	112	1	1

Fuente: Elaboración propia mediante datos de UNESPA.

elegidas ya que fueron creadas a partir de una muestra significativa del mercado español e informan de mayores probabilidades de supervivencia en edades altas, que otras tablas

consultadas, como las utilizadas por la Seguridad Social. Estas tablas se utilizarán, no para tarificar un producto, sino para determinar durante cuánto tiempo, la Seguridad Social o una entidad aseguradora deberá pagar a sus pensionistas o asegurados en el posterior experimento de este trabajo, por lo que, a mayores tasas de supervivencia, mayores serán las cargas para estas entidades por pagos futuros y más necesario será complementar a estos sistemas con rentas vitalicias tontinas.

Empezamos por definir ε como una variable aleatoria que representa la edad en años en el momento de la muerte de una persona. Esta variable, de tipo continuo en el tiempo, tendrá valor 0 en el nacimiento de la persona e irá creciendo en forma de entero a medida que pasan los años. Tendremos asimismo, la probabilidad de fallecer en un periodo de un año concreto dado que la persona ha llegado viva a esa edad $Pr\{n < \varepsilon \leq n+1 \mid \varepsilon > n\}$.

Y mediante la siguiente recursión,

$$Pr\{n < \varepsilon \leq n+1\} = Pr\{\varepsilon \leq n\} + (1 - Pr\{\varepsilon \leq n\})Pr\{n < \varepsilon \leq n+1 \mid \varepsilon > n\},$$

Podemos definir la función de distribución de mortalidad para cada edad entera como:

$$F(n) = Pr\{\varepsilon \leq n\}.$$

De forma continua en el tiempo podemos definir:

$$F(t) = Pr\{\varepsilon \leq t\},$$

que mediante la interpolación de edades enteras con el método de fuerza de mortalidad constante, llegamos a:

$$F(t) = 1 - \big(1 - F(n)\big)\left(\frac{1 - F(n+1)}{1 - F(n)}\right)^{t-n}, n < t < n + 1. \qquad (1)$$

De esta forma tendremos un *hazard rate*,

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

constante en cada intervalo $(n, n + 1)$, donde $f(t)$ es la función de densidad de $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.

Las tablas de mortalidad serán leídas de tal forma que si el miembro i seleccionado en la tontina es un hombre, tendrá una función de distribución tal que, $F_i(t) = F_{PASEM\ hombre}(t - t_i)$ y $F_i(t) = F_{PASEM\ mujer}(t - t_i)$ para el caso de mujer, donde t_i es el momento de nacimiento del individuo y siendo en ambos casos la distribución para $\varepsilon_i, F_i(t) = Pr\{\varepsilon_i \leq t\}$. Adicionalmente, sabemos que por la interpolación en (1), la probabilidad de que se den dos fallecimientos en el mismo instante de tiempo es cero.

5.2 Fair transfer plan

Definiremos a continuación de modo formal cómo se estructura este método de generación de tontinas justas, basándonos en la definición de Sabin (2010). Tras esto, pasaremos a desarrollar el algoritmo que finalmente utilizaremos para generar tontinas como completo al sistema de pensiones de la Seguridad Social.

- **Definición.**

En el momento de creación del fondo, estará este formado por un número *m* de miembros, los cuales pueden ser de cualquier edad y sexo. Identificamos a cada miembro con un índice, siendo $i = 1, 2, \ldots, n$. Adicionalmente, se definen las variables aleatorias $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ como el momento en el tiempo en el que fallecerá cada miembro. Con esta información, se definirá $\tau = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$ siendo τ el instante en el que se da el siguiente fallecimiento de un miembro del fondo.

Mientras no fallezca ningún miembro del fondo, esta tontina no generará ningún rendimiento, por lo que empezaremos buscando el instante en el que uno de los miembros fallece, por lo que la probabilidad de que el miembro *j* fallezca es; $p_j = Pr\{\tau = \varepsilon_j \mid \tau = t\}$. La probabilidad entonces, de que el miembro *j* fallezca en el intervalo $(t, t + \Delta]$ dado que nadie ha fallecido antes de t es:

$$\frac{F_j(t+\Delta) - F_j(t)}{1 - F_j(t)} \approx \frac{\Delta f_j(t)}{1 - F_j(t)} = \Delta\mu_j(t),$$

siendo $\mu_j(t)$ el *hazard rate*. Podemos asumir que si Δ es pequeño, la probabilidad de fallecimiento de dos personas es cero y asumimos también por tanto, que las diferentes ε_j son independientes. La probabilidad de fallecimiento de un individuo en el periodo de tiempo Δ es aproximadamente $\sum_i \Delta\mu_i(t)$ y proporcional a:

$$p_j = \lim_{\Delta \to o} \frac{\Delta\mu_j(t)}{\sum_{i=1}^{m} \Delta\mu_i(t)} = \frac{\mu_j(t)}{\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t)}.$$

La probabilidad de fallecimiento conjunta en $(t, t + \Delta]$ es $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Definimos ahora, J que será el miembro *j* que fallecerá en el siguiente instante de tiempo con total seguridad y cuyo balance s_j será redistribuido entre el resto de los miembros i del fondo. También definimos $\alpha_{i,j}$ como la proporción de este balance s_j que el miembro i va a recibir. Adicionalmente, sabemos que si $i = j$, este será el miembro fallecido y si no se cumple la igualdad, i será uno de los miembros supervivientes. Finalmente, es sencillo ver que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} = 0$ ya que la cantidad que los miembros se reparten, es la misma cantidad que aquella sobre la que el miembro *j* pierde el derecho al fallecer.

La cantidad aleatoria a percibir por cada miembro (aleatoria ya que depende de si el miembro continua vivo o no en el siguiente periodo) es:

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} s_j I_j(J),$$

siendo en este caso I_j un indicador de si el miembro $i = J$, en cuyo caso el valor de I_j será cero. Y tendremos un pago esperado tal que:

$$ER_i = \sum_{j=1}^{m} p_j \alpha_{i,j} s_j$$

Adicionalmente, esta proporción $\alpha_{i,j}$ habrá de satisfacer las siguientes condiciones:

$\alpha_{j,j} = -1$ para $j = 1, 2, \dots, m,$ (2)

$0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1$ para $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j,$ (3)

$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} = 0$ para $j = 1, 2, \dots, m,$ (4)

$\sum_{j=1}^{m} p_j \alpha_{i,j} s_j = 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $p_j = \frac{\mu_j(t)}{\sum_{j=1}^{m} \mu_i(t)}$. (5)

Una vez definido esto, se dice que toda combinación de $\alpha_{i,j}$ que satisfagan estas condiciones (2, 3, 4 y 5), es un FTP. De esta forma tenemos que un FTP es aquel reparto que hace que el capital del fallecido sea equitativamente distribuido entre todos los miembros vivos y que, por tanto, la esperanza de los pagos futuros de cada miembro sea 0.

- **Existencia del FTP.**

Tras definir el FTP, Sabin (2010) adicionalmente expresa la importancia de definir cuándo este existe. Para ello propone el siguiente teorema (Sabin, 2010 pp. 14).

Una condición necesaria para la existencia de un FTP es:

$$0 = \sum_{j=1}^{m} p_j \alpha_{i,j} s_j = -p_i s_i + \sum_{j \neq i} p_j \alpha_{i,j} s_j \leq -p_i s_i + \sum_{j \neq i} p_j s_j,$$

de donde tenemos el teorema:

Teorema. *Se ha definido t como el instante de tiempo en el que uno de los m miembros fallece. Adicionalmente, se ha definido* p_j *como la probabilidad de que sea el miembro j quien fallezca. Por último,* s_j *se define como el capital que deja en su muerte al grupo el miembro j. Se dice que existe un FTP si:*

$$p_i s_i \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} p_j s_j \,, para\ i = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Este teorema dice que el FTP solo existirá si ninguno de los miembros tiene más de la mitad del peso del fondo. Efectivamente, el algoritmo que vamos a utilizar para la extracción de resultados, falla cuando este teorema no se satisface, pero esto solo ha podido ocurrir bajo ejemplos explicativos de unos pocos miembros. Cuando en el uso que se le da al algoritmo están involucrados una gran masa de miembros, la probabilidad de que un solo miembro acumule un gran peso sobre el fondo es nula. Más es así cuando se aplica esta tontina a un sistema como el de la Seguridad Social, ya que las cotizaciones de cada individuo, y por tanto, sus contribuciones a la tontina, están limitadas por un máximo.

- **Ejemplos de FTP.**

Siguiendo con el esquema propuesto por Sabin (2010), se desarrollan a continuación ejemplos de la creación de FTPs para ver de una forma intuitiva cómo funciona el proceso de reparto de los capitales de aquellos miembros que han fallecido. Tras esto, veremos la forma de computar estos escenarios mediante algoritmos.

De esta forma, hemos generado varios ejemplos para ver cómo, dependiendo de las características de los miembros, se asignarán mayores o menores pesos a cada individuo, por lo que su rendimiento será también mayor o menor.

Antes de entrar en el detalle de los ejemplos, vamos a ver la estructura matricial de una tontina con $m = 5$.

$$\begin{matrix} -1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} & \alpha_{1,5} \\ \alpha_{2,1} & -1 & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} & \alpha_{2,5} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & -1 & \alpha_{3,4} & \alpha_{3,5} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & -1 & \alpha_{4,5} \\ \alpha_{5,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{5,3} & \alpha_{5,4} & -1 \end{matrix}$$

Tenemos una matriz 5x5, donde vemos en cada columna un posible escenario. En cada escenario, se da el fallecimiento de uno de los i miembros. El miembro fallecerá o no, en caso de fallecer se le asignará un -1, lo que significa que pierde su contribución inicial. Es fácil ver, que en cada escenario, fallecerá el miembro $\alpha_{i,i}$ del i escenario contrastado, por ejemplo, en el escenario 1, fallecerá el primer individuo.

En caso de no fallecer, se le asignará un peso $\alpha_{i,j}$ tal y como hemos definido previamente. Adicionalmente, como hemos comentado en el subapartado definición, vemos que efectivamente, la suma de cada columna es 0, ya que, por ejemplo, en el primer caso, donde fallece el miembro 1, este pierde su derecho sobre su contribución inicial, que será repartida entre el resto de miembros.

Figura 5: Descriptivos de los miembros de una tontina de tamaño 4.

i	Edad	Género	q_x	$\mu_i(x)$	p_i
1	33	Hombre	0,000774	0,000336274	0,026068776
2	60	Mujer	0,004801	0,002090069	0,162027182
3	65	Hombre	0,012703	0,005552183	0,43041856
4	70	Mujer	0,011267	0,004920971	0,381485482

Fuente: Elaboración propia.

Centrándonos ahora en los ejemplos numéricos, en la tabla (figura 5) tenemos el primer ejemplo de tontina. En esta, vemos un índice que identifica a cada miembro, seguido por su edad, género, q_x extraída de las tablas PASEM dependiendo del sexo del individuo i y de su edad, su *hazard rate* calculado como $\mu_{\boldsymbol{i}}(\mathrm{x}) = -\ln(1 - q_x)$, su contribución a la tontina s_i y finalmente la columna p_i que informa de la probabilidad de fallecimiento de cada miembro, dado que uno de ellos va a fallecer[22].

En el primer ejemplo, se ha generado un FTP considerando que la contribución de todos los miembros es la misma (1.000€), por lo que los pesos en función de $p_i s_i$ de cada individuo, se determinarán según sus probabilidades condicionadas de fallecimiento. Esperamos por tanto, que aquel individuo con mayor p_i reciba un pago mayor de la tontina en caso de no ser quien fallezca, para que este sistema sea justo, ya que, como hemos explicado anteriormente, se entiende que aquellos individuos con mayores edades y por tanto con menos años esperados de vida, reciban mayores pagos para igualar las cuantías totales de los pagos esperados de todos ellos.

[22] Este cálculo se lleva a cabo ya que, es necesario llevar a uno de los miembros a su fallecimiento en el momento *t* definido en cada ejemplo, para contrastar los resultados del FTP.

Ejemplo 1: FTP con contribución de 1.000€ de todos los miembros.

$$\begin{matrix} -1 & 0{,}0169 & 0{,}0344 & 0{,}0224 \\ 0{,}1051 & -1 & 0{,}2346 & 0{,}1528 \\ 0{,}5673 & 0{,}6233 & -1 & 0{,}8248 \\ 0{,}3275 & 0{,}3598 & 0{,}7310 & -1 \end{matrix}$$

En caso de que el miembro de menor edad (i = 1) fallezca, su contribución de 1.000€ se repartiría entre los miembros 2, 3 y 4. Debido a que el hombre de 65, tiene una probabilidad de fallecimiento mayor que la del resto de individuos, en este caso su rendimiento por el fallecimiento del primer miembro será de $R_3 = 0{,}5673\ x\ 1.000€ = 567{,}30€$. Del mismo modo, vemos que el rendimiento de la mujer de 70 años, cuya q_x es menor según las tablas de mortalidad utilizadas, será inferior, y en este caso recibiría un total de 327,5€. Finalmente, el miembro más joven, recibirá un pago de 105,1€. Esta cantidad tan pequeña que tan solo llega a un 18.5% de los 567,3€ que recibe el miembro 3, tiene una explicación teórica y de acuerdo a la estadística actuarial, ya que existe una probabilidad mayor de que este miembro de 60 años, sobreviva al fallecimiento de los otros dos, por lo que, llegado el momento, recibirá las contribuciones inicialmente aportadas por estos dos miembros. De esta forma, el sistema propuesto es actuarialmente justo.

De forma similar, en las columnas 2, 3 y 4 de este ejemplo, se pueden observar los escenarios en los que fallecerían los miembros 2, 3 o 4. Todos ellos tienen en común que el miembro de 33 años, no recibe nunca más de 34.40€, y es que, tal y como se ha explicado en el párrafo anterior, existe una mayor probabilidad de que este miembro sobreviva al resto, por lo que esperaríamos que cobrase la contribución inicial de cada uno de los otros miembros aun sobrevivientes. En este sentido, veremos que los pagos por mortalidad de las tontinas son escasos para edades no muy avanzadas, siendo recomendable que este producto sea un complemento de otro que genere un flujo de pagos constante a lo largo de los primeros años de la jubilación y que a partir de un punto, cubra por ejemplo, el riesgo de sobrevivir a nuestra fuente de ingresos, esto es, vivir más años de los que nuestra pensión tenía previsto.

Otro resultado que conviene mencionar es que en todas las columnas, la suma de los rendimientos de todos los miembros es 0, tal y como se definió en el apartado anterior. Por ejemplo, en la columna 1 tendremos que para $j = 1, -1 + 0{,}1051 + 0{,}5673 + 0{,}3275 = 0$. Esto es lo que nos garantiza que este producto es actuarialmente justo, ya que, la ganancia esperada a lo largo de la vida de la tontina para estos miembros, en comparación con su contribución, es cero.

Ejemplo 2: Cambio en la contribución del miembro de 33 años (20,000€).

$$\begin{matrix} -1 & 0{,}4483 & 0{,}5687 & 0{,}5347 \\ 0{,}1393 & -1 & 0{,}1133 & 0{,}1065 \\ 0{,}4695 & 0{,}3009 & -1 & 0{,}3588 \\ 0{,}3912 & 0{,}2507 & 0{,}3180 & -1 \end{matrix}$$

Vemos en el ejemplo 2, que si bien la probabilidad condicionada de fallecimiento es el parámetro más importante a la hora de establecer los pesos de cada miembro dentro de la tontina, la contribución que hagan también lo es. De esta forma, un individuo de 33 años, a pesar de que muy probablemente sobreviva al resto de individuos del fondo, recibirá pagos mayores que el resto ya que su contribución es también mucho mayor. Por tanto, hemos obtenido un procedimiento de distribución de ganancias en un grupo, que es justo tanto para aquellos miembros de mayor edad, como para aquellos miembros que deciden aportar una cantidad mayor al valor total del fondo.

5.3 Definición de los algoritmos

En este apartado definimos la computación de los algoritmos utilizados durante la realización de este trabajo y con la que hemos generado los resultados anteriores.

- **Algoritmo 1: FTP**

Sabin (2010) propone como primera solución para la generación de tontinas justas, la asignación de pesos a cada miembro del fondo mediante el siguiente algoritmo para el FTP. Primeramente, definimos las fórmulas a utilizar.

- **Algoritmo 2: FTP separable**

El algoritmo anterior, fue propuesto por Sabin (2010) como un problema de asignación de FTPs y es el punto de partida de todos los trabajos que hemos consultado en la realización de este proyecto. Durante la realización del trabajo, hemos replicado este algoritmo, pero nos hemos encontrado con el problema de que no llegaba a un resultado óptimo, como explica de nuevo en Sabin (2011) un año después[23]. En este nuevo trabajo, Sabin propone una solución "separable" de este algoritmo. Adicionalmente, definimos el algoritmo mediante la programación realizada en R.

$$\tilde{a}_{i,k}^{+} = \begin{cases} \dfrac{1}{p_k s_k}\left[-\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,j} p_j s_j\right], & i < k, \\ \dfrac{1}{p_k s_k}\left[p_i s_i - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,j} p_j s_j\right], & i > k, \end{cases}$$

$$\alpha_{i,k}^{+} = \begin{cases} \min\left(\tilde{a}_{i,k}^{+}, 1\right), & i \neq k, \\ -1, & i = k; \end{cases}$$

$$\tilde{a}_{i,k}^{-} = \begin{cases} \dfrac{1}{p_k s_k}\left[-\sum_{j=k+1}^{m} p_j s_j - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,j} p_j s_j\right], & i < k, \\ \dfrac{1}{p_k s_k}\left[2p_i s_i - \sum_{j=k+1}^{m} p_j s_j - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,j} p_j s_j\right], & i > k, \end{cases}$$

$$\alpha_{i,k}^{-} = \begin{cases} \min\left(\tilde{a}_{i,k}^{-}, 0\right), & i \neq k, \\ -1, & i = k; \end{cases}$$

$$\bar{a}_{i,k} = \begin{cases} \left[\sum_{j=k}^{m} p_j s_j\right]^{-1}\left[-\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,j} p_j s_j\right], & i < k, \\ \left[-p_i s_i + \sum_{j=k}^{m} p_j s_j\right]^{-1}\left[p_i s_i - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{i,j} p_j s_j\right], & i > k, \\ -1, & i = k. \end{cases}$$

Por su parte, la computación de los algoritmos ha sido realizada por el autor en el software estadístico R (R Core Team, 2014), como elemento necesario para la consecución de este trabajo. Ambos algoritmos son definidos a continuación.

[23] En pocas palabras, se debe a que este algoritmo no cumple la condición de Monge, ya que, dependiendo del orden de los vectores (en este caso, el orden de los miembros de la tontina), el resultado puede cambiar y no genera un resultado óptimo.

Algoritmo 1: FTP (Sabin, 2010)

```
alpha=matrix( rep( 0, len=length(p)^2), nrow = length(p))
upper.alpha=matrix( rep( 0, len=length(p)^2), nrow = length(p))
upper.alpha.tilde=matrix( rep( 0, len=length(p)^2), nrow = length(p))
lower.alpha=matrix( rep( 0, len=length(p)^2), nrow = length(p))
lower.alpha.tilde=matrix( rep( 0, len=length(p)^2), nrow = length(p))
target.alpha=matrix( rep( 0, len=length(p)^2), nrow = length(p))
h = rep(0,length(p))
l = rep(0,length(p))
x = rep(0,length(p))
```

(1)

```
for (k in 1:m){
```

Construcción de la columna k:

```
  for (i in 1:m){
    for (j in 1:(k-1)){
```

- **Límite superior**

```
      if (i < k){
        upper.alpha.tilde[i,k] = 1/(p[k]*s[k])
%*% (-sum(alpha[i,j]*p[j]*s[j]))
      } else if (i > k){
        upper.alpha.tilde[i,k] =
1/(p[k]*s[k])%*%(p[i]*s[i]-
sum(alpha[i,j]*p[j]*s[j]))
      } else if (!(i = k)){
        upper.alpha[i,k] =
min(upper.alpha.tilde[i,k],1)
      } else{
        upper.alpha[i,k] = -1   }}
```

(2)

- **Límite inferior**,

```
      if (i < k){
        lower.alpha.tilde[i,k] =
1/(p[k]*s[k])%*%(-for(j in
k+1:m){sum(p[j]*s[j])}-for(j in 1:k-
1){sum(alpha[i,j]*p[j]*s[j])})
      } else if (i > k){
        lower.alpha.tilde[i,k] =
1/(p[k]*s[k])%*%(2*p[i]*s[i]-(for(j in
k+1:m){sum(p[j]*s[j])})-(for(j in 1:k-
1){sum(alpha[i,j]*p[j]*s[j])}))
      } else if (!(i = k)){
        lower.alpha[i,k] =
max(lower.alpha.tilde[i,k],0)
      } else{
        lower.alpha[i,k] = -1
      }
```

(3)

- **Límite objetivo**

```
    if (i < k){
      target.alpha[i,k] = t(for(j in
k:m){sum(p[j]*s[j])})%*%t(-for(j in 1:k-
1){sum(alpha[i,j]*p[j]*s[j])})
    } else if (i > k){
      target.alpha[i,k] = t(-p[i]*s[i]+(for(j in
k:m){sum(p[j]*s[j])}))%*%(p[i]*s[i]-(for(j
in 1:k-1){sum(alpha[i,j]*p[j]*s[j])}))
    } else{
      target.alpha[i,k] = -1  }}
```

(4)

Cálculo de la suma de columnas para los límites inferior, superior y objetivo.

```
  for(i in 1:m){
    h[i] = sum(upper.alpha[i,k])
    l[i] = sum(lower.alpha[i,k])
    x[i] = sum(target.alpha[i,k])
  }
```

(5)

Interpolación para generar sumas de los elementos de la columna igual a cero.

```
  if (x[i]>0){
```

Interpolación entre límites objetivo y superior.

```
    beta[i] = x[i]/(x[i]-l)
    for(i in 1:m){
      alpha[i,k] = beta[i]%*%lower.alpha[i,k]
+ (1-beta[i])%*%target.alpha[i,k]
    }
  } else if (x[i] < 0){
```

(6)

Interpolación entre límites objetivo e inferior.

```
    beta[i] = x[i]/(x[i]-h[i])
    for(i in 1:m){
      alpha[i,k] = beta[i]*upper.alpha[i,k] + (1-
beta[i])*target.alpha[i,k]
    }
  } else{
```

Obtención del valor objetivo

```
    for(i in 1:m){
      alpha[i,k] = target.alpha[i,k]}}}
```

(7)

Algoritmo 2: FTP separable (Sabin, 2011)

Vector inicial de p y s en tabla XX
m = length(p)
theta = rep(0,m)
pisi = p * s
x = sum(pisi)
# Get theta, the normalised values of pisi. 	
for (i in 1:length(pisi)){
  theta[i] = pisi[i]/x
}
(**1**)
	Obtención del índice del mayor theta.
	iMax = which.is.max(theta)
	Reordenación de theta para que el mayor esté en la posición 1.
	t1 = theta[1]
	tmax = theta[iMax]
	theta[1] = tmax
	theta[iMax] = t1
	theta
	(**2**)

Comprobación de que ningún valor de theta es superior a 0.5
stopifnot(theta[1]<0.5)
 	
Generación de pesos.
 	
lo = theta[1]
hi = lo/(1-lo)
weight = rep(0,length(theta))
 	
while (TRUE){
  weight[1] = 0.5 * (lo + hi)
  if (weight[1]>=hi){ return("limit point precision is reached") }
  else if (weight[1]<=lo){ return("floating point precision is reached") }
(**3**)
	for (i in 2:m){
	Computamos los pesos restantes
	  lam = weight[1] * (1 - weight[1])
	  x = 4 * lam / theta[1]
	
	  weight[i] = 0.5 - 0.5 * sqrt(1- x * theta[i])
	  # Get sum of weights, compare to 1, set next guess accordingly.
	  }
	  if (sum(weight)<1){lo = weight[1]
	  } else{
	    hi = weight[1] } }
	(**4**)

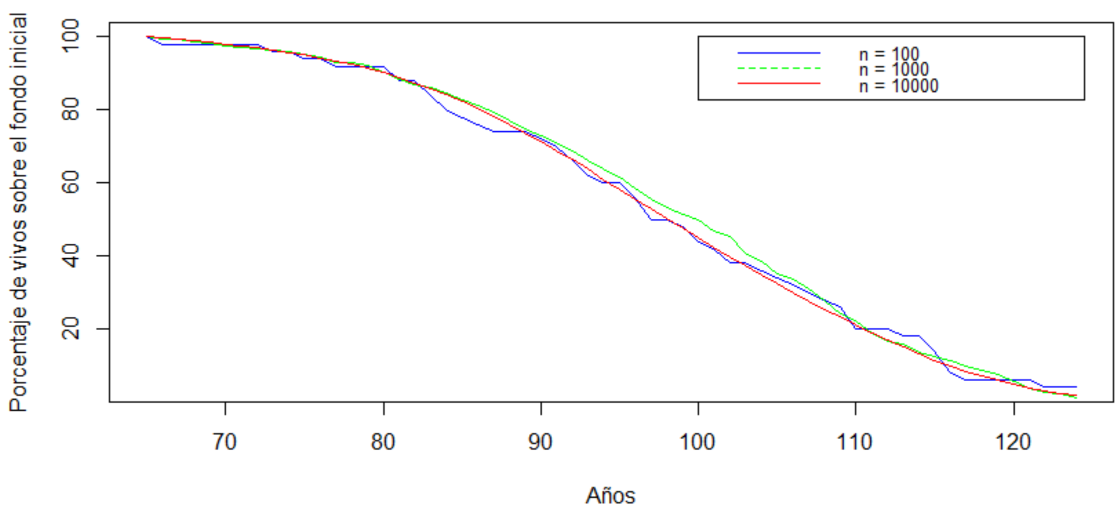
Reordenación de los índices
t1 = theta[1]
tmax = theta[iMax]
theta[1] = tmax
theta[iMax] = t1
 	
w1 = weight[1]
wmax =weight[iMax]
weight[1] = wmax
weight[iMax] =w1
(**5**)
	for (i in 1:m){
	stopifnot(length(s)==length(p))
	pisi[i] = p[i]*s[i] }
	
	ftp = matrix(rep(0, len=length(p)^2), nrow = length(p))
	for (i in 1:m){
	  for (j in 1:m){
	    ftp[i,j] = weight[i]/(1-weight[j])
	    ftp[i,i] = -1 } }
	(**6**)

6. RESULTADOS

Para la generación de resultados, la base de datos a utilizar ha sido extrapolada de los datos de cotizaciones de la Seguridad Social por tramos de cuantía[24]. Ha sido generada una distribución mediante los estadísticos principales de cada rango de cotización, para posteriormente generar muestras aleatorias que puedan alimentar de forma dinámica las tontinas en el tiempo. Cada individuo, en base a esa cotización, tendrá una edad asignada aleatoriamente y un sexo.

Una característica común de los siguientes experimentos es la tabla de mortalidad sobre la que se basa y que el número de miembros ha de ser elevado. Durante la explicación de la tontina de Alexander Hamilton en el apartado 2, vimos que uno de los fallos que cometió, fue extrapolar su estudio sobre una muestra reducida a la población total. En la figura 6 se muestra que a mayor número de miembros formen la tontina, el número de fallecimientos esperado por las tablas de mortalidad, estará más cerca del número de fallecimientos real bajo estas tasas de mortalidad. Este concepto servirá del mismo modo

Figura 6: Comparativa de tamaños muestrales 100, 1000 y 10000.



Fuente: elaboración propia.

[24] Seguridad Social (2019), Pensiones contributivas en vigor, por tramos de cuantía. Disponible en: http://www.seg-social.es/wps/portal/wss/internet/EstadisticasPresupuestosEstudios/Estadisticas/EST23/EST24/EST195

para explicar, que a mayor número de miembros compongan la tontina, se generará un número de pagos menos volátil en el tiempo.

6.1 Tontina justa

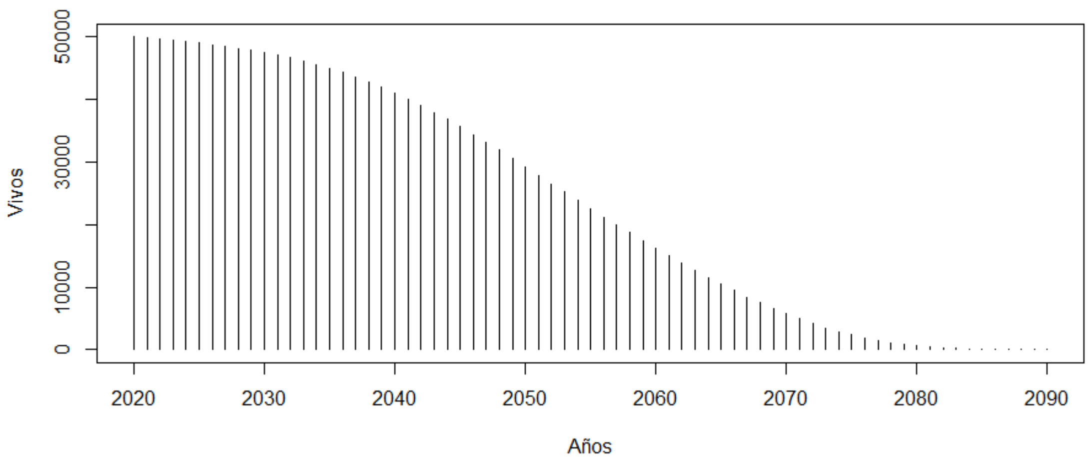
Se definen a continuación las características de este primer experimento.

- El modelo de mortalidad utilizado es el definido en el apartado 4, habiendo sido utilizadas las tablas de mortalidad PASEM 2010.
- Para la generación de pagos se ha utilizado una aproximación a los algoritmos de FTP descritos anteriormente.
- Se han generado pagos en función de los fallecimientos anuales.
- El tamaño elegido para este fondo es de 50.000 miembros sin reposición.

Para la realización de este experimento, ha sido creado un fondo compuesto por las aportaciones de 50.000 personas, distribuidas indistintamente entre hombres y mujeres, y con también, distintas contribuciones iniciales. La edad de entrada para este experimento ha sido aleatoriamente generada y su rango es de 30 a 65 años.

Los pagos generados solo hacen referencia a los pagos por mortalidad de otros miembros del grupo, siendo este, el valor de la contribución inicial al fondo por parte de cada individuo. Para simplificar este primer experimento, estas contribuciones no han sido reinvertidas, esto es, no generan ningún rendimiento adicional. Por lo que, tras cada

Figura 7: Número de vivos a lo largo de la vida de la tontina 2020 – 2082.



Fuente: elaboración propia.

Figura 8: Dinámica de la tontina 2020 – 2082 (miles de euros).

Año	Vivos	Fallecidos	Reparto	Año	Vivos	Fallecidos	Reparto
2020	50,000	191	93,941.82	2055	22,528	1,312	612,909.78
2021	49,809	181	88,788.42	2056	21,216	1,251	574,917.84
2022	49,628	217	98,213.22	2057	19,965	1,249	578,915.40
2023	49,411	197	90,296.22	2058	18,716	1,269	585,950.82
2024	49,214	212	105,425.88	2059	17,447	1,277	593,796.84
2025	49,002	263	130,084.08	2060	16,170	1,200	572,509.56
2026	48,739	305	142,958.76	2061	14,970	1,160	533,775.90
2027	48,434	298	134,697.78	2062	13,810	1,153	537,801.18
2028	48,136	322	149,786.70	2063	12,657	1,118	502,983.18
2029	47,814	353	154,517.16	2064	11,539	1,061	494,316.48
2030	47,461	401	175,160.16	2065	10,478	1,013	472,871.28
2031	47,060	416	186,993.66	2066	9,465	1,028	483,216.30
2032	46,644	492	228,222.54	2067	8,437	958	455,904.12
2033	46,152	531	247,998.24	2068	7,479	942	427,504.56
2034	45,621	603	271,996.62	2069	6,537	828	378,569.94
2035	45,018	634	290,438.40	2070	5,709	803	372,529.92
2036	44,384	729	332,720.64	2071	4,906	715	329,399.28
2037	43,655	802	352,855.02	2072	4,191	684	320,210.52
2038	42,853	884	409,280.34	2073	3,507	582	252,347.76
2039	41,969	924	417,171.30	2074	2,925	522	238,617.96
2040	41,045	970	456,272.88	2075	2,403	464	214,219.74
2041	40,075	978	445,502.82	2076	1,939	439	194,954.34
2042	39,097	1,157	529,381.02	2077	1,500	340	155,230.74
2043	37,940	1,083	509,504.94	2078	1,160	278	119,233.38
2044	36,857	1,191	573,610.80	2079	882	251	110,063.10
2045	35,666	1,243	585,014.22	2080	631	189	86,121.00
2046	34,423	1,256	581,245.56	2081	442	152	69,146.70
2047	33,167	1,263	574,737.24	2082	290	92	40,053.30
2048	31,904	1,328	605,287.62	2083	198	84	36,135.54
2049	30,576	1,350	636,374.76	2084	114	51	22,035.72
2050	29,226	1,371	626,366.16	2085	63	28	12,219.06
2051	27,855	1,311	603,756.72	2086	35	15	7,234.08
2052	26,544	1,319	608,383.44	2087	20	11	4,249.56
2053	25,225	1,338	635,872.02	2088	9	5	1,240.26
2054	23,887	1,359	646,301.88	2089	4	3	1,648.50

Fuente: Elaboración propia.

fallecimiento, la cantidad que se repartirá entre los miembros supervivientes será el valor de la contribución inicial al fondo por parte de cada individuo.

Podemos ver en la tabla (figura 8) una representación de la tontina entre 2020 y 2082, con la dinámica de fallecidos y el reparto de su contribución al resto de individuos que siguen vivos. En un inicio, el fondo está formado por 50.000 personas, las cuales tienen un máximo de edad de 65 años, por lo que esperamos un número de fallecimientos pequeño. A medida que los años de vida del fondo van aumentando, se espera una probabilidad de fallecimiento del conjunto superior, por lo que, año tras año, se genera una proporción de muertos mayor, hasta que en el año 2053, tras 33 años de vida de la tontina, ya ha desaparecido la mitad del grupo inicial. La tontina, en este caso, dejará de generar pagos al finalizar el año 2089, donde el número de individuos vivos es solo 1, recibiendo este, un último pago de 1.6 millones de euros, esto es, la suma de las contribuciones iniciales de los tres últimos fallecidos.

Vemos adicionalmente en la tabla (figura 9), una extracción de los pagos por mortalidad de la persona de 30 años que más años ha vivido, falleciendo un periodo antes del cierre del fondo. En este caso, su contribución inicial fue de 19.320€ y es mujer. Esta contribución es de las menores del fondo, lo que sumado a que, con 30 años y siendo mujer, la probabilidad de fallecimiento a un año vista es de 0,000277 según la tabla de mortalidad PASEM, hace que los pagos por mortalidad durante los primeros años sean insignificantes.

Se puede observar que los rendimientos anuales de esta tontina son muy bajos y no llegan siquiera a 100€ hasta los 63 años. A partir de los 75 años, la tontina empieza a generar rendimientos por mortalidad superiores al 2.5% sobre la contribución inicial, de más de un 5% a los 80 años y es a partir de este momento, cuando la tontina comienza a generar rendimientos mucho más altos que cualquier producto de seguro de vida promedio. A los 85 años, su rendimiento acumulado a lo largo de este fondo es ya de más de 18.000€ y llegará a generar ganancias del 130% y del 180% en sus últimos años de vida. En 2089, este miembro habrá fallecido, por lo que la tabla informa del valor de su contribución, sobre la que perderá su derecho a cobro y que pasará a formar parte de las ganancias del último individuo vivo. En el momento en el que solo queda un superviviente, se debería generar una nueva tontina para las siguientes generaciones, ya que este experimento no ha sido configurado con el objetivo de ser continuo en el tiempo.

Figura 9: Dinámica de la tontina 2020 – 2082 (miles de euros).

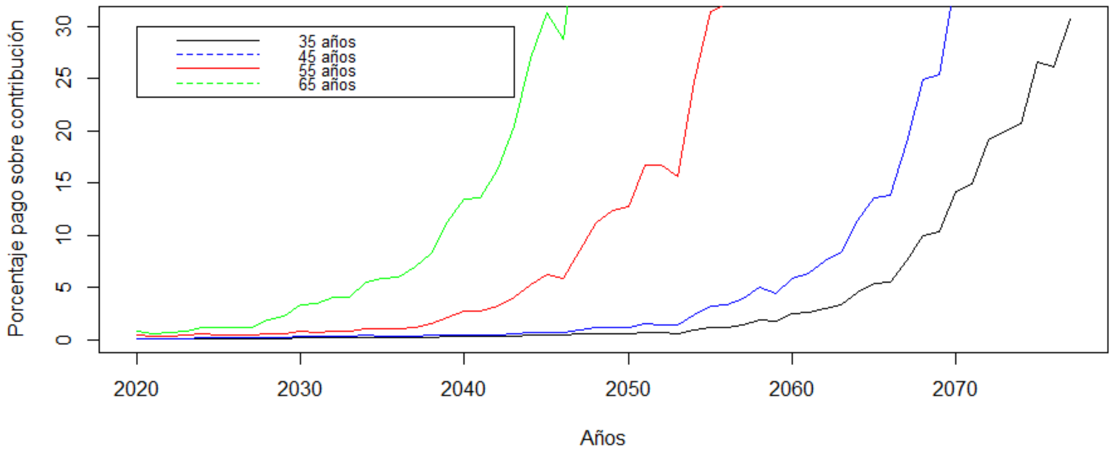
Año	Edad	Pago	Año	Edad	Pago
2020	30	6.16	2055	65	128.55
2021	31	5.9	2056	66	134.23
2022	32	6.62	2057	67	151.4
2023	33	6.24	2058	68	174.21
2024	34	7.71	2059	69	204.44
2025	35	10.16	2060	70	226.95
2026	36	11.99	2061	71	242.1
2027	37	11.99	2062	72	284.61
2028	38	13.97	2063	73	337.93
2029	39	15.21	2064	74	421.27
2030	40	18.03	2065	75	519
2031	41	19.86	2066	76	644.1
2032	42	24.56	2067	77	739.54
2033	43	26.46	2068	78	853.5
2034	44	28.33	2069	79	935.11
2035	45	29.5	2070	80	1,171.73
2036	46	33.23	2071	81	1,331.85
2037	47	34.94	2072	82	1,698.40
2038	48	40.94	2073	83	1,706.67
2039	49	42.54	2074	84	2,121.77
2040	50	47.98	2075	85	2,528.02
2041	51	48.76	2076	86	3,185.75
2042	52	60.56	2077	87	3,517.42
2043	53	60.16	2078	88	3,724.39
2044	54	69.72	2079	89	5,086.59
2045	55	72.81	2080	90	6,060.56
2046	56	74.05	2081	91	7,902.59
2047	57	75.4	2082	92	6,968.05
2048	58	82.52	2083	93	11,293.74
2049	59	90.71	2084	94	13,218.74
2050	60	92.85	2085	95	13,470.24
2051	61	93.15	2086	96	15,500.88
2052	62	98.98	2087	97	26,174.70
2053	63	110.91	2088	98	36,316.80
2054	64	123.57	2089	99	-19,320.00

Fuente: Elaboración propia.

Este caso ha sido ilustrado ya que, como se ha comentado, el individuo de estudio ha sido el más joven de los últimos supervivientes. Si bien, su escasa contribución inicial ha hecho que los rendimientos generados no sean atractivos. En el gráfico siguiente (figura 10) se observa la comparativa de ganancias sobre contribución de la población de edad 35, 45, 55 y 65.

Si nos colocamos en 2030, cuando las edades son 45, 55, 65 y 76 años respectivamente, podemos localizar dos individuos (45, 55) que no están recibiendo grandes pagos en proporción a su contribución, ya que sus probabilidades de fallecimiento son aún muy bajas, sin embargo, el miembro de 65 se encuentra ante un momento de aceleración de sus pagos y el de 75 años está recibiendo ya rendimientos en torno al 5% de su contribución inicial. El crecimiento de los pagos de este último, crecerán exponencialmente hasta su fallecimiento, mientras que los dos individuos de menor edad seguirán recibiendo pagos por debajo del 5% de su contribución.

Figura 10: Comparativa de pagos sobre contribución para personas de edad 35, 45, 55 y 65 (porcentajes).



Se observa que aquellas personas de menor edad, perciben la renta durante un mayor número de años. Si bien, para cualquier año seleccionado en el que haya dos grupos de edad distinto, se aprecia que aquellos de mayor edad están recibiendo una ganancia mayor. Este resultado es de gran interés para este estudio, ya que vemos que, a igual contribución, se cumple que los mayores individuos habrán de percibir mayores rentas para contrarrestar su desventaja en cuanto a menor esperanza de pagos futuros. Esto confirma que el método de reparto propuesto en nuestro experimento, es justo actuarialmente, por lo que miembros de distintas edades tendrán incentivos suficientes para agruparse bajo un mismo fondo de tontinas, en contra de lo que ocurría con las tontinas tradicionales.

Otro resultado que podemos extraer de este experimento, es que si bien, el mecanismo de reparto es justo, podría no ser atractivo para un ahorrador que quiera recibir un flujo constante de pagos a partir de, por ejemplo, el momento de su jubilación. Proponemos a continuación, un siguiente ejemplo donde con ciertas mejoras al producto, conseguiremos generar un mayor atractivo para la parte contratante.

6.2 Tontina como complemento a la pensión en España

En este segundo experimento, se propone que la tontina complemente a un sistema de pensiones como puede ser el de España. Hemos visto en el ejemplo anterior, que la tontina genera rendimientos consistentes, una vez que el individuo, ahora pensionista, supera un rango de edad que por lo general se encuentra por encima de los 75 años.

En este caso, se propone como ejercicio final, que los pagos a los pensionistas, sean el resultado de la suma de los rendimientos por mortalidad vistos en el experimento anterior, más el cobro habitual de la pensión pública por jubilación. De esta forma, cada trabajador, a lo largo de su vida laboral, generará un derecho de cobro mediante sus cotizaciones a la Seguridad Social, que se traducirá en esta renta de carácter vitalicio. Cumpliremos así pues, el principio de proporcionalidad contributiva sobre el que se basa el sistema actual.

Nuestro objetivo con el siguiente experimento, es generar un flujo constante de pagos en el tiempo, que permita al jubilado un flujo de pagos constante en el tiempo, desde el mismo momento de jubilación. Este será un resultado deseable tanto para el propio pensionista, como para la sostenibilidad del sistema de pensiones.

Las características de esta pensión complementada con una renta tontina son:

- Al igual que en el caso anterior, el modelo de mortalidad utilizado es el definido en el apartado 4, habiendo sido utilizadas las tablas de mortalidad PASEM 2010.
- Los pagos acordes al FTP han sido generados como hemos explicado anteriormente.
- Se han generado pagos en función de los fallecimientos anuales. Adicionalmente, cada miembro percibe el pago de la pensión de jubilación en función de su cotización.
- Los pagos se realizarán a partir de los 65 años.
- El tamaño elegido para este fondo es de 500.000 miembros con reposición.

El tamaño del fondo ha sido incrementado a 500.000 personas, con el objetivo de generar suficientes pagos por mortalidad y replicar lo que sería un sistema de pensiones público, donde el número de miembros es elevado.

Una de las principales novedades respecto al caso anterior, es que, en este experimento, la tontina nunca llega a un final. Cada vez que fallece un miembro, un nuevo individuo es generado, con la edad de 65 años y un derecho de cobro de pensión, basado en su cotización histórica. De esta forma, se está creando un escenario que no tiene fin, y que puede replicar un sistema de pensiones continuo en el tiempo, a diferencia del caso anterior, donde la tontina era disuelta cuando fallecía el penúltimo miembro.

El momento del primer pago por mortalidad, coincide con el primer pago por la pensión de jubilación. Hemos visto en el caso anterior, que los pagos por mortalidad, en los primeros 65 años de vida, eran prácticamente insignificantes, por lo que la diferencia del planteamiento es prácticamente inapreciable.

Para explicar este experimento, vamos a apoyarnos en la tabla (figura 11) donde podemos ver los pagos anuales por la pensión con tontina de una mujer que en el momento de la creación de este sistema de pensiones tenía 65 años y fue la más longeva de su generación.

El resultado principal está en la última columna y se puede extraer, que esta persona va a tener un derecho de cobro por pensiones de algo más de 27.000€, que recibirá de forma mensual tal y como es habitual. Simplificando, este derecho de cobro se calculará, por ejemplo, en base a las cotizaciones de los últimos 25 años, tal y como es de aplicación hoy en día en España. De esta forma, podemos asumir que cada integrante del fondo, habrá generado un derecho de cobro de una pensión de carácter vitalicio por un valor anual, que en este caso es de unos 27.000€.

La diferencia con un sistema de pensiones tradicional, es que el derecho de cobro se repartirá entre unos pagos por mortalidad, dados por el fallecimiento de los otros miembros mayores de 65 años y una parte que compensa a estos pagos hasta llegar a sumar el valor total de la prestación que cobrará el asegurado.

Figura 11: Pensión con tontina.

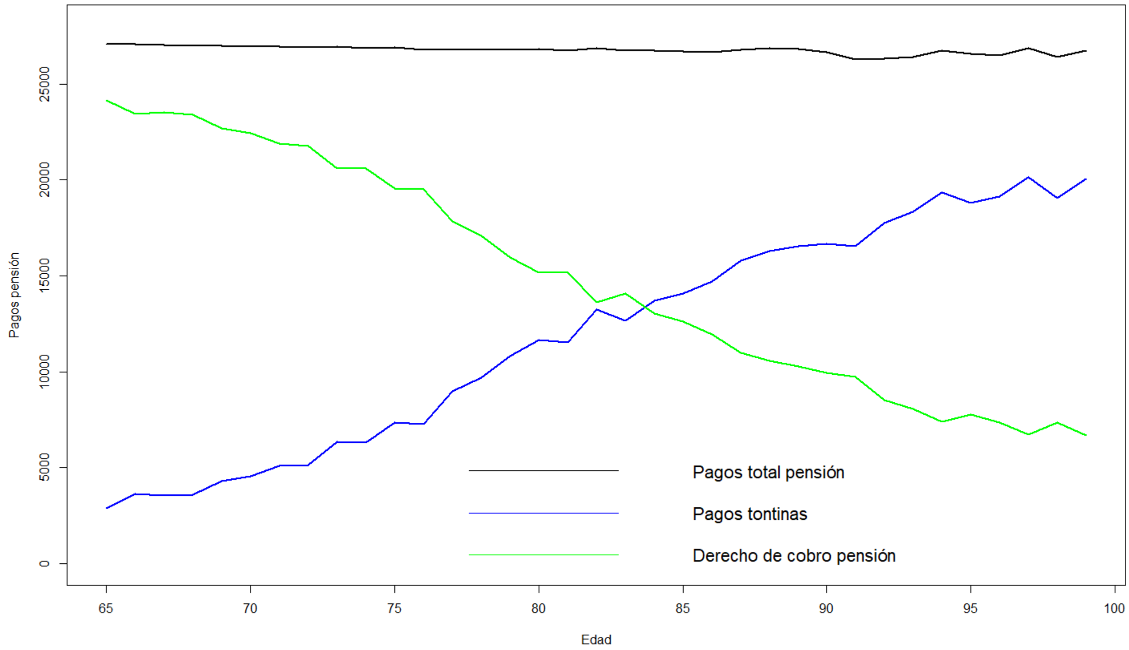
Año	Edad	Pensión	Pago mortalidad	Pago total
2020	65	25,120.09	2,110.33	27,230.42
2021	66	24,920.89	2,296.52	27,217.41
2022	67	24,599.33	2,616.58	27,215.91

2023	68	24,306.75	2,915.48	27,222.23
2024	69	24,093.66	3,133.83	27,227.49
2025	70	23,802.79	3,434.91	27,237.70
2026	71	23,623.75	3,616.97	27,240.72
2027	72	23,442.65	3,792.08	27,234.73
2028	73	22,890.27	4,326.06	27,216.33
2029	74	21,986.83	5,225.15	27,211.98
2030	75	21,047.07	6,160.48	27,207.55
2031	76	20,463.42	6,744.37	27,207.79
2032	77	19,915.03	7,284.67	27,199.70
2033	78	19,197.41	8,001.38	27,198.79
2034	79	18,653.55	8,512.35	27,165.90
2035	80	17,664.08	9,500.99	27,165.07
2036	81	16,542.96	10,679.77	27,222.73
2037	82	16,029.00	11,182.66	27,211.66
2038	83	15,042.62	12,173.75	27,216.37
2039	84	14,125.14	13,093.26	27,218.40
2040	85	13,298.15	13,887.99	27,186.14
2041	86	12,185.35	15,014.05	27,199.40
2042	87	11,257.35	15,955.15	27,212.50
2043	88	10,298.82	16,945.83	27,244.65
2044	89	9,441.40	17,830.02	27,271.42
2045	90	8,477.45	18,885.14	27,362.59
2046	91	8,032.79	19,256.88	27,289.67
2047	92	7,128.64	20,170.49	27,299.13
2048	93	6,425.55	20,907.83	27,333.38
2049	94	5,909.63	21,396.64	27,306.27
2050	95	5,365.13	21,895.04	27,260.17
2051	96	4,844.75	22,364.08	27,208.83
2052	97	4,473.13	22,564.49	27,037.62
2053	98	3,908.27	23,058.44	26,966.71
2054	99	3,351.24	23,712.98	27,064.22
2055	100	3,071.58	23,903.58	26,975.16
2056	101	3,026.59	24,025.46	27,052.05
2057	102	0.00	-16,446.22	-16,446.22

Fuente: elaboración propia.

En los primeros años, se puede ver que el mayor peso de la pensión lo soporta el sistema de pensiones público, sin embargo, tal y como ocurriría en el ejemplo de una tontina clásica, a medida que el pensionista cumple años y su peso relativo en el fondo aumenta, los pagos por mortalidad van también en aumento.

Figura 12: Pagos obtenidos por una pensión complementada con renta tontina.



Fuente: elaboración propia.

El individuo de interés en este ejemplo, nunca dejará de percibir una cantidad cercana a los 27.000€, sin embargo, la ventaja de este sistema está en que el sistema de pensiones se desprende del riesgo de longevidad de sus pensionistas, ya que cuando uno de los individuos supera la edad de fallecimiento promedio, no es el fondo de pensiones el que asume esos pagos, sino que este riesgo es compartido por los pensionistas.

Un resultado que se puede observar en la tabla, es que la proporción de la pensión asumida por los fallecimientos de otros miembros, va en aumento y a partir de los 85 años, ya supera a los pagos asumidos por el sistema público de pensiones. Los pagos por fallecimiento, al igual que en el caso anterior, provienen de la contribución de los miembros fallecidos y esta contribución no es otra cosa, que el derecho de cobro de pensiones acumulado mediante sus cotizaciones. De esta forma, es posible cuantificar las obligaciones de pago del sistema de pensiones, si las tablas de mortalidad son precisas, ya que una vez calculada cuál es la pensión de cada uno de los contribuyentes, este sistema de pensión complementada con una renta tontina, se encargará de generar los pagos precisos.

En este ejemplo, el individuo ha ido consumiendo su derecho por pensiones hasta que, en el momento de su fallecimiento, a los 102 años, devuelve al fondo 16.446€ que serán repartidos entre los miembros supervivientes y, en este caso, entre los nuevos miembros que se incorporan con edad 65 años, al fondo cada vez que un miembro fallece.

Finalmente, de forma gráfica podemos ver (figura 12) cómo mediante el cobro de una pensión decreciente y unos pagos crecientes por fallecimiento de otros pensionistas, este individuo es capaz de recibir un pago constante en el tiempo de 27.000€. Para este ejemplo, se ha decidido generar pagos constantes. La teoría económica dice que el patrón de consumo en el tiempo es decreciente una vez llegado a la edad de jubilación, si bien, en este caso, un patrón de consumo constante podría interpretarse como una mayor necesidad de flujos monetarios por mayores costes sanitarios o de dependencia.

Variar estas hipótesis de consumo no sería complicado en el experimento de la pensión con tontina, si bien, su justificación, mediante el uso de modelos de *prospect theory*, requiere de un estudio mayor sobre esta rama económica y se deja como punto a desarrollar en futuras investigaciones[25].

[25] Más información sobre la aplicación de distintos patrones de consumo a las tontinas en Twersky y Kahneman (1992), RuB y Schelling (2018) y Weinert y Gründl (2017).

7. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos hecho un repaso a la historia de las tontinas, desde su elaboración teórica a manos del banquero Lorenzo de Tonti a mediados del siglo XVII, pasando por las diferentes formas que ha ido tomando en múltiples países del mundo y particularmente a su situación legal actual en España.

Hemos visto que el riesgo de longevidad se convertirá en un problema a no muy largo plazo en España, que tendrá la población con mayor esperanza de vida en 2040, y no existen grandes remedios ante este riesgo de no saber determinar cuánto vivirá la población de un país y por tanto, cuáles serán las obligaciones de pago de un sistema de pensiones público.

Se ha comprobado adicionalmente, que es posible generar un mecanismo de reparto de tontinas justas. Este sistema permite que los miembros que forman el fondo de tontinas, sean de diferentes edades y aporten distintos niveles de contribución.

En el apartado metodológico, han sido desarrollados diferentes algoritmos que generen de forma justa repartos de los rendimientos de la tontina, mediante la utilización de los softwares Python y R.

Una vez definida la metodología a seguir, se aplicó a un caso práctico donde hemos visto que las tontinas son efectivamente productos actuarialmente justos, capaces de generar incentivos a miembros de características generacionales y de niveles de contribución muy dispares. De esta forma, se plantean las tontinas en este trabajo, como una alternativa a otros productos vitalicios ofrecidos por las aseguradoras de forma tradicional.

Finalmente, se ha propuesto que, para paliar los efectos de la incertidumbre, que genera el aumento de longevidad sobre las obligaciones de pago del sistema público de pensiones, se complemente este sistema con una renta tontina vitalicia, la cual distribuya el riesgo de longevidad entre los mismos pensionistas. Mediante este último experimento, se ha visto que este sistema es capaz de generar un flujo de pagos constantes de forma vitalicia para todos los jubilados.

8. BIBLIOGRAFÍA

Blake, D. y Burrows, W., 2011. Survivor Bonds: Helping to hedge mortality risk. The Journal of Risk and Insurance, 2001, vol. 68, No 2, 339-348.

Cairns, A., Blake, D. y Dowd, K., 2008. Modelling and Management of Mortality Risk: A Review. Scandinavian Actuarial Journal – May 2008.

Donnelly, C., 2018. Actuarial fariness and solidarity in pooled annuity funds.

Foreman, K. J., Marquez, N., Dolgert, A., Fukutaki, K., Fullman, N., McGaughey, M., ... Murray, C. J. L., (2018). Forecasting life expectancy, years of life lost, and all-cause and cause-specific mortality for 250 causes of death: reference and alternative scenarios for 2016–40 for 195 countries and territorie.En Global Health Metric, Vol 392 November 10, 2018 (pp.2052-2090).

Hellwege, Phillip, 2018. The Past, Present, and Future of Tontines. A Seventeenth Century Financial Product and the Development of Life Insurance. Duncker & Humblot, Berlin. Chap. 12, Tontines in Spain (Rafael Illescas).

Lange, A., List, J.A. y Price, M.K., 2007. A fundraising mechanism inspired by historical tontines: Theory and experimental evidence. Journal of Public Economics 91 (2007) 1750 – 1782.

McKeever, K., 2009. A Short History of Tontines. Fordham Journal of Corporate & Financial Law, volume 15, number 2, article 5.

Milevsky, M.A., Salisbury, T.S., Gonzalez, G. y Jankowski, H., 2018. Annuities Versus Tontines in the 21st Century. Society of Actuaries.

Ruß, J., Schelling, S., 2018. Multi Cumulative Prospect Theory and the Demand for Cliquet-Style Guarantees.

Sabin, M., 2010. Fair Tontine Annuity. SSRN: http://ssrn.com/abstract=1579932

Sabin, M., 2011. A Fast Bipartite Algorithm for Fair Tontines. SSRN: http://ssrn.com/abstract=1848737

Mckeever, Kent (2017), A tontine before Lorenzo de Tonti's! The Lisbon Tontine Proposal of 1641. Fordham Journal of Corporate & Financial Law.

R Core Team (2014). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL http://www.R-project.org/.

Sabin, M., 2010. Fair Tontine Annuity. SSRN: http://ssrn.com/abstract=1579932

Sabin, M., 2011. A Fast Bipartite Algorithm for Fair Tontines. SSRN: http://ssrn.com/abstract=1848737

Tortella, G., Ortiz-Villajos, J.M., y García Ruiz, J.L., 2011. Historia del Banco Popular: La lucha por la Independencia. Banco Popular, Madrid, Barcelona, Buenos Aires, 2011.

Twersky, A., Kahneman, D., 1992. Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty, 5:297-323.

Weinert, J.H. y Gründl, H., 2017. The Modern Tontine: An Innovative Instrument for Longevity Risk Management in an Aging Society. International Center for Insurance Regulation.

Weir, D., 1989. Tontines, public finance, and revolution in France and England, 1688–1789. The Journal of Economic History 49, 95–124.