

## LA CORRECCIÓN DE LOS TANTOS DE MORTALIDAD DE LOS DEPENDIENTES: UNA APLICACIÓN AL CASO ESPAÑOL

Eduardo Sánchez Delgado<sup>\*</sup>, Juan Manuel López Zafra<sup>\*\*</sup>  
Sonia de Paz Cobo<sup>\*\*\*</sup>

### Abstract

A key element in the pricing of long term care insurance is the quantification of mortality, especially that corresponding to the dependents insured. Unfortunately, usual fits present a lack of adjustment in the older ages, at least for the Spanish population of dependents. What we propose in the following pages is a joint correction of the extramortality rates departing from the well-known Rickayzen and Walsh (2002) reciprocal function of one plus an exponential. We consider both an additive correction and a multiplicative one too over the overall mortality rates reflecting the declining of the absolute mortality differentials in higher ages.

**Keywords:** dependents, long term care insurance, extramortality, correction of mortality rates.

### Introducción

Un elemento clave en la tarificación de los seguros de dependencia lo constituye la cuantificación de la mortalidad, especialmente aquella correspondiente a los asegurados dependientes.

En la literatura actuarial sobre la mortalidad de los asegurados dependientes, existe unanimidad en cuanto a que los tantos de mortalidad de los dependientes son distintos y más elevados que los de la mortalidad general

---

<sup>\*</sup>Director del Área Actuarial, MAPFRE División Familiar. edsanch@mapfre.com

<sup>\*\*</sup>Departamento de Estadística e Investigación Operativa II (Métodos de decisión). Universidad Complutense de Madrid. juanma-lz@ccee.ucm.es

<sup>\*\*\*</sup>Departamento de Economía Aplicada I. Universidad Rey Juan Carlos, Madrid. sonia.depaz@urjc.es. Correspondencia.

que expresan las tablas estándar utilizadas por los aseguradores para la valoración de riesgos normales, y por supuesto, sensiblemente mayores a la mortalidad de los asegurados autónomos. Por consiguiente se acepta la siguiente relación:

$$q_x^d > q_x > q_x^a$$

Otra cuestión distinta, y resuelta a través de diferentes procedimientos, es el tratamiento que se da a los tantos de mortalidad cuando se trata de medir y expresar matemáticamente dicha aseveración. En ese caso, no existe una única aproximación sino que se pueden encontrar distintas correcciones sobre la mortalidad general, para cabezas en situación de dependencia.

El primer paso para la obtención de los tantos de mortalidad ajustados consiste en contar con una tabla de mortalidad de cabezas en estado de dependencia, en forma de valores brutos, cuya definición se corresponda con la utilizada contractualmente en la póliza como generadora de prestaciones en forma de dependencia, y que emplee criterios equivalentes para obtención de la graduación de la dependencia, a los utilizados en la derivación de las tasas de incidencia. Los datos brutos de partida se han obtenido de la encuesta de origen francés HID 98-01.<sup>4</sup>

Las diferencias en la mortalidad de los dependientes, según su grado, da lugar no sólo a valores de sobremortalidad diferentes sino también a las formas funcionales en las que se modelizan dichos valores, de modo que se suelen asociar correcciones aditivas a la gran dependencia y correcciones multiplicativas a las dependencias menos severas, como se puede ver en Gatenby (1991).

Una vez que se derivan datos brutos de mortalidad de dependientes se proponen distintas fórmulas de corrección de los tantos de mortalidad, eligiéndose el procedimiento que minimiza la función de desviaciones cuadráticas.

---

<sup>4</sup>L'INSEE (2001)

### Tabla de base para la corrección

La mortalidad de los dependientes se suele derivar a partir de estadísticas de mortalidad general o de mortalidad de cabezas sanas. En este caso se eligen unas tablas de rentas, dado que, en esta modalidad el asegurador también debe hacer frente al riesgo de supervivencia, tal y como se pone de manifiesto en Pitacco (2002). En este trabajo ajustaremos las estadísticas francesas, HID 98-01, corregidas para población española, utilizando como estadísticas base las tablas PERMF-00P.

### Corrección de los tantos de mortalidad

Las correcciones sobre la mortalidad general que se emplean para modelar la correspondiente a los asegurados dependientes pueden representarse generalizando la expresión que propone Ainslie (2000), a partir de la siguiente fórmula:

$$q_x^d = q_{x+\delta} \times \beta(x) + \alpha(x)$$

en este caso:

$\beta(x)$  es un múltiplo de la mortalidad general, que puede depender a su vez de la edad.

$\alpha(x)$  es un recargo aditivo sobre la mortalidad general, que puede depender a su vez de la edad.

$\delta$  es un número entero de años a añadir a los tantos de mortalidad general.

A partir de la expresión general hay distintas aproximaciones dependiendo de las diferentes formas funcionales en que se concrete la fórmula general. La elección de un procedimiento de ajuste concreto dependerá de la graduación de la dependencia que a su vez está estrechamente relacionada con el tipo de patologías generadoras del estado de dependencia.

La corrección a partir de la adición de un número de años  $\delta$ , a los tantos de mortalidad de los riesgos estándar, se sustituye frecuentemente por mortalidades de tipo multiplicativo, aditivo o una combinación de ambas, aunque no se obtengan exactamente los mismos valores utilizando uno y otro

procedimiento. No se empleará este tipo de ajuste para modelizar la sobremortalidad en este trabajo.

Para encontrar la mejor aproximación a los datos brutos de mortalidad de los grandes dependientes corregidos para la población española, se compararán éstos con la tabla de mortalidad estándar elegida para la tarificación, las tablas PERMF-00P

## **I. La corrección aditiva**

En el caso de que en la fórmula de cálculo general  $\beta(x)$  tome un valor igual a la unidad, se aplicará una corrección de tipo aditivo sobre los tantos de mortalidad generales. En esta familia de correcciones de la mortalidad nos encontramos con distintas posibilidades de ajuste, o bien una constante fija, o bien otras correcciones que dependen de la edad. En este trabajo se han empleado las correcciones aditivas en función de la edad denominadas por Rickayzen y Walsh (2002) como “recíproco de uno más una exponencial”.

### **I.a. corrección fija**

Además de su sencillez, este tipo de ajuste, como se señala en Ainslie (2000), tiene la propiedad de que, en términos relativos, su peso disminuye con respecto a la mortalidad global que siempre es creciente en los rangos de edades de las personas mayores.

La expresión de la mortalidad de los dependientes quedaría en este supuesto:

$$q_x^d = q_x + \alpha$$

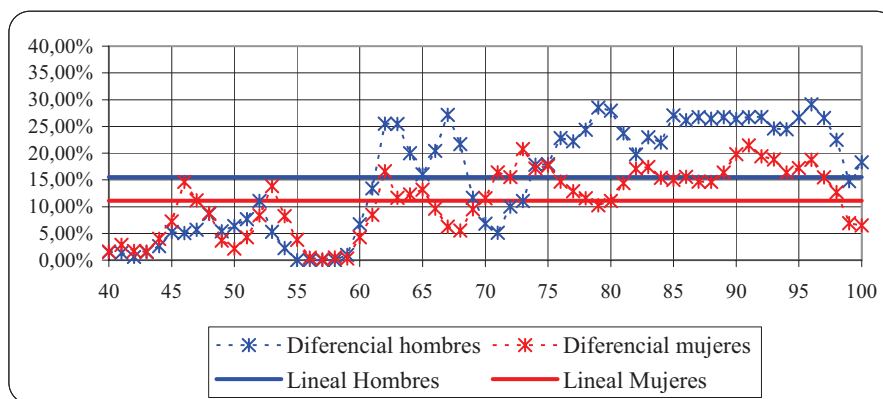
Esta corrección se ha empleado en muchos de los trabajos<sup>5</sup> en la literatura actuarial dado que ajusta mejor la mortalidad de los grandes dependientes que otro tipo de aproximaciones, y es muy sencilla su implementación.

---

<sup>5</sup> Entre otros, en MacDonald y Pritchard (2001) se propone una corrección aditiva para enfermos de *Alzheimer* institucionalizados de 0,17291. En Gatenby (2001) se incorpora considera un valor de 0,1 para la sobremortalidad de los dependientes.

El valor de los parámetros del ajuste se realiza por un procedimiento de mínimos cuadrados ordinarios<sup>6</sup> obteniéndose los siguientes resultados:<sup>7</sup>

**Gráfico 1**  
**Diferenciales Brutos en los Tantos de Mortalidad de Dependientes y su Ajuste**  
**Ajuste Aditivo a partir de una Corrección Fija**



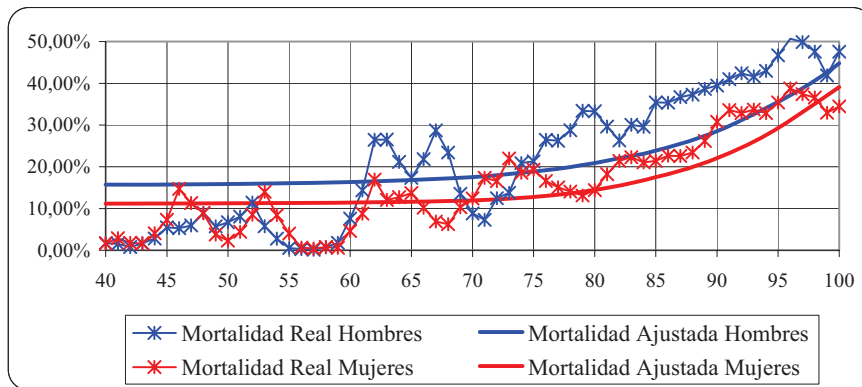
**Fuente:** Elaboración propia.

El ajuste aditivo a partir de una corrección fija sobrevalora la extramortalidad en las edades más bajas e infravalora la de edades más elevadas. Este mismo efecto se puede apreciar en los valores totales ya ajustados de mortalidad para dependientes por lo que este procedimiento de ajuste no es el más adecuado.

<sup>6</sup> En López (1987) se puede obtener una explicación exhaustiva de este método de obtención de los parámetros.

<sup>7</sup> Los valores obtenidos para  $\alpha$ , en el caso de una gran dependencia para España, son de 0,155 para hombres y de 0,111 para mujeres.

**Gráfico 2**  
**Tantos de Mortalidad de Grandes Dependientes. Valores Brutos vs. Modelizados**  
**Ajuste Aditivo a partir de una Corrección Fija**



**Fuente:** Elaboración propia.

### **I.b. Corrección en función de la edad**

Este procedimiento de ajuste aditivo sobre los tantos de mortalidad general tiene la ventaja que considera la edad como variable independiente en una forma funcional.

La aproximación a la sobremortalidad propuesta por Rickayzen y Walsh (2002) para modelizar los datos del Reino Unido se encuadran en este tipo de correcciones. En ese trabajo no se cuenta con información del País británico por lo que se utilizan los datos brutos de Estados Unidos, obtenidos a partir del informe de la sociedad norteamericana de actuarios SOA, que considera los datos de las encuestas de dependencia entre los años 1982 y 1984. Las estadísticas de cambio de estado se obtuvieron a partir de las personas que se encontraban percibiendo prestaciones del sistema de provisión pública *Medicare*. Como resultado de dicho estudio se observó que:

- Los tantos de mortalidad se incrementan con el nivel de discapacidad.
- El ratio de mortalidad entre aquellos que fallan más de 3 actividades de la vida diaria y los que no fallan ninguna disminuye con la edad.
- Las diferencias en mortalidad entre aquellos que fallan más de 3 actividades de la vida diaria y los que no fallan ninguna actividad

tiene, aproximadamente,<sup>8</sup> un comportamiento aditivo en la mortalidad con un valor de 0,15.<sup>9</sup>

Con estas premisas de partida Rickayzen y Walsh (2002) proponen una corrección aditiva a partir de una función recíproca de uno y una exponencial del siguiente tipo:

$$q_x^d = q_x + \frac{\delta}{1 + \lambda^{x_i - x}}$$

siendo:

$\delta$	Es el valor máximo a incorporar en función de la edad al que se converge asintóticamente.
$\lambda$	Es el factor de pendiente.
$x_i$	Es la edad de inflexión en la que la curva cambia de forma, de convexa a cóncava.

Este tipo de modificación aditiva de la mortalidad, está fundamentada en las siguientes consideraciones, que caracterizan la función propuesta, y que se emplea tanto en Rickayzen y Walsh (2002) como en Leung<sup>10</sup> (2003):

- Existe una débil relación entre la mortalidad de las cabezas sanas y de aquellas que son dependientes.
- La extramortalidad es significativamente más baja en las edades jóvenes.
- Para las dependencias menos severas no se aplica sobremortalidad.

---

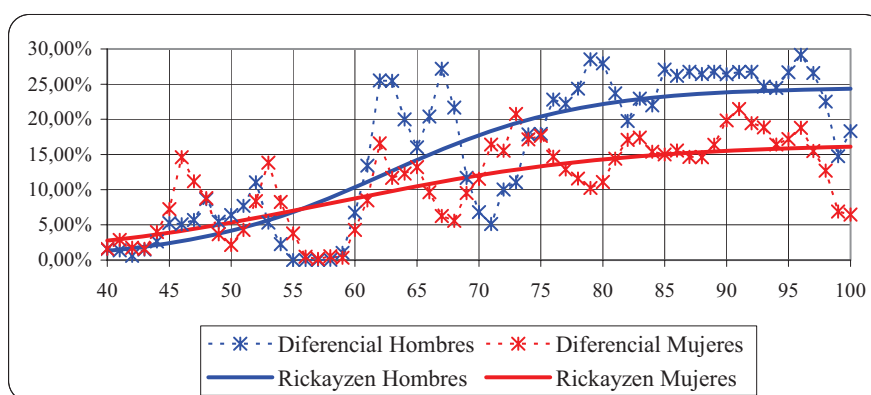
<sup>8</sup> Los valores para hombres, en el tramo 65-74, es de 0,171, en el tramo 75-84, es de 0,175 y para los mayores de 0,132. En mujeres, para los mismos tramos, los valores son de 0,164, 0,105 y 0,155. Véase SOA (1995)

<sup>9</sup> Leung (2003) utiliza esta aproximación con ese valor máximo de  $\delta$ , de 0,15, para modelizar la sobremortalidad en la población australiana.

<sup>10</sup> En ambos trabajos se elige el mismo valor como factor de pendiente (1,1) y como edad de inflexión (50 años), variando únicamente el valor máximo de corrección de la sobremortalidad en el grado más severo, que en el caso de Rickayzen y Walsh (2002) es de 0,2 y en el de Leung, es el que se obtiene de las estadísticas SOA.

En nuestro caso la obtención de los valores de  $\delta$ ,  $\lambda$  y de  $\mathbf{x}_i$  se realiza por un procedimiento de mínimos cuadrados ordinarios con respecto a los valores brutos de gran dependencia estimados para España, ajustándose la siguiente expresión:<sup>11</sup>

**Gráfico 3**  
**Diferenciales Brutos en los Tantos de Mortalidad de Dependientes y su Ajuste**  
**Ajuste Aditivo. Corrección propuesta por [RICKAYZEN, WALSH, 02]**



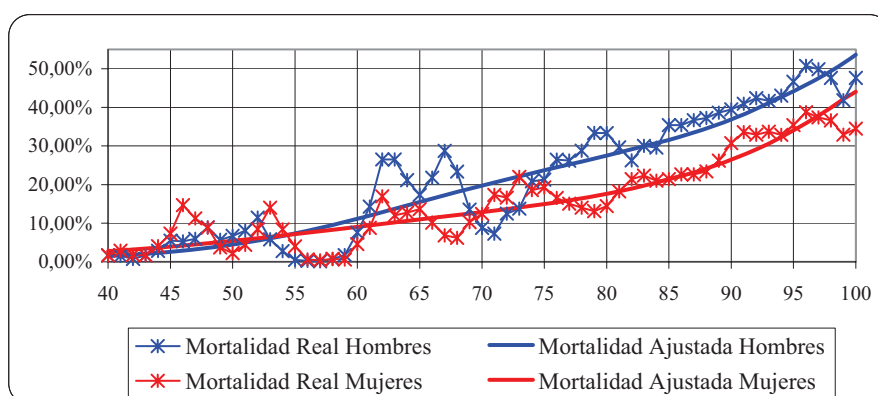
**Fuente:** Elaboración propia.

Este ajuste aditivo dependiente de la edad ajusta mucho mejor la sobremortalidad que el caso aditivo de corrección fija. Los valores totales ya ajustados de mortalidad para dependientes según este procedimiento aparecen en el siguiente gráfico.

<sup>11</sup> Los valores calculados de  $\delta$ ,  $\lambda$  y de  $\mathbf{x}_i$  en el caso español para una gran dependencia son de 0,245; 1,135; y 62,50 para el caso de los hombres, y de 0,165; 1,09 y 58,61 para las mujeres.



**Gráfico 4**  
**Tantos de Mortalidad de Grandes Dependientes. Valores Brutos vs. Modelizados**  
**Ajuste Aditivo. Corrección propuesta por [RICKAYZEN, WALSH, 02]**



Fuente: Elaboración propia.

## II. La corrección multiplicativa

Si se particulariza la expresión general, en el caso que se le de a  $\alpha(x)$  un valor nulo nos encontraremos con una corrección multiplicativa de los tantos de mortalidad generales quedando la expresión como sigue a continuación:

$$q_x^d = q_x \times \beta(x)$$

### II.a. Corrección fija

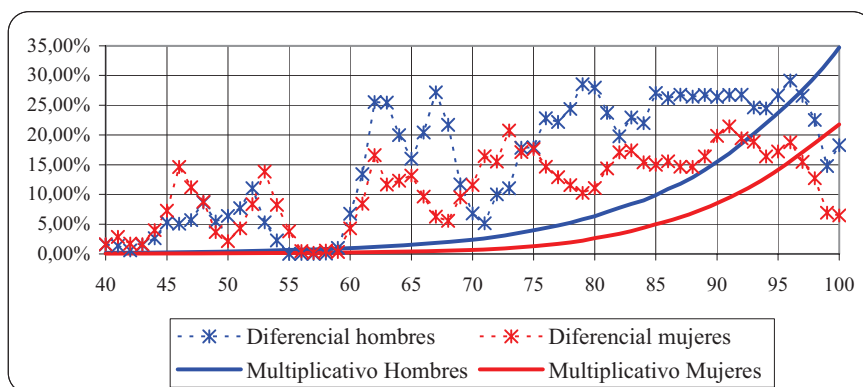
Al igual que en el caso aditivo con corrección fija, este procedimiento es sencillo de implementar y muy intuitivo en su interpretación por lo que se ha empleado con frecuencia,<sup>12</sup> especialmente para aquellos grados de dependencia menos severos. El inconveniente que presenta este método es su deficiente ajuste para las grandes dependencias dado que éstas, dependen estadísticamente de forma muy débil de los tantos de mortalidad generales. En el gráfico que aparece a continuación se puede apreciar esta aseveración,

---

<sup>12</sup> En España, por ejemplo, en Pociello, Varea, Martínez, se aplica una corrección multiplicativa sobre los tantos de mortalidad de un 10 por 100.

al ajustar por mínimos cuadrados ordinarios el diferencial de mortalidad, entre las tablas PERMF-00P y la mortalidad para grandes dependientes, considerando las HID 98-01 modificadas para España.

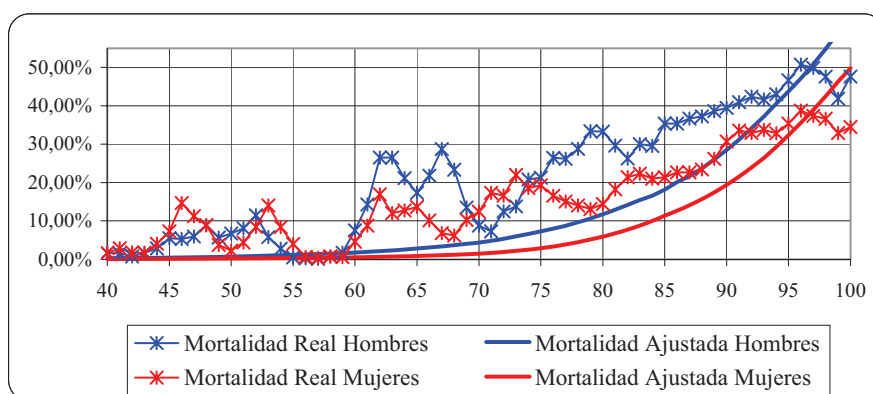
**Gráfico 5**  
**Diferenciales Brutos en los Tantos de Mortalidad de Dependientes y su Ajuste**  
**Ajuste Multiplicativo con Corrección Fija**



**Fuente:** Elaboración propia.

Los valores totales de mortalidad para dependientes según este procedimiento, que aparecen en el siguiente gráfico, reflejan el mal ajuste de la mortalidad para dependientes:

**Gráfico 6**  
**Tantos de Mortalidad de Grandes Dependientes. Valores Brutos vs. Modelizados**  
**Ajuste Multiplicativo con Corrección Fija**



**Fuente:** Elaboración propia.

## II.b. Corrección en función de la edad

Con el fin de mejorar, a partir de una modificación multiplicativa de los tantos de mortalidad, la bondad del ajuste anterior, teniendo en cuenta, como se observa en SOA, que la proporción de la mortalidad de los dependientes con respecto a la mortalidad general disminuye con la edad, algunos autores proponen una corrección del ajuste multiplicativo. Boladeras<sup>13</sup> (2003) propone una corrección lineal decreciente con la edad de la sobremortalidad, a partir de la siguiente expresión:

$$q_x^d = q_x \times \max[(\omega - x \cdot \phi); 1]$$

siendo:

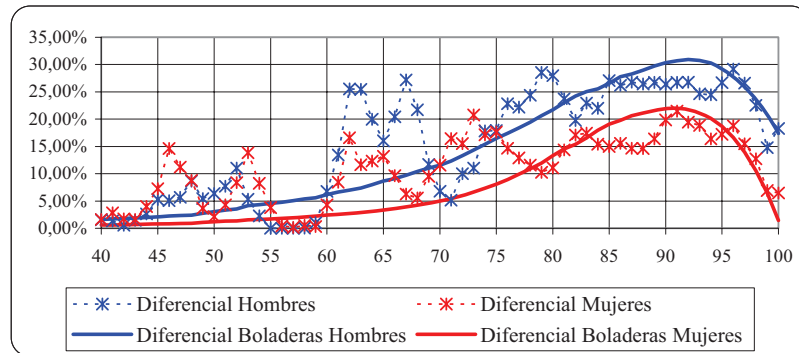
- ⊖ Es la corrección multiplicativa máxima a considerar sobre los tantos de mortalidad estándar para reflejar la mortalidad de los dependientes.
- ϕ Es la reducción sobre los tantos de mortalidad de dependientes que se aplica en cada edad.

En el gráfico que aparece a continuación se refleja el ajuste por mínimos cuadrados ordinarios, del diferencial de mortalidad entre las tablas PERMF-00P y la mortalidad para grandes dependientes, considerando las HID 98-01 modificadas para España utilizando la corrección multiplicativa en función de la edad.

---

<sup>13</sup> En ese trabajo se considera que ⊖ tiene un valor de 2 y ϕ tiene un valor de 0,01089. Este tipo de corrección implica que la mortalidad de los dependientes es inicialmente el doble que la de la población general, y va aproximándose linealmente hacia la de la población general, valor que se alcanza con una edad de 91,81 años.

**Gráfico 7**  
**Diferenciales Brutos en los Tantos de Mortalidad de Dependientes y su Ajuste**  
**Ajuste Multiplicativo con Corrección en Función de la Edad**

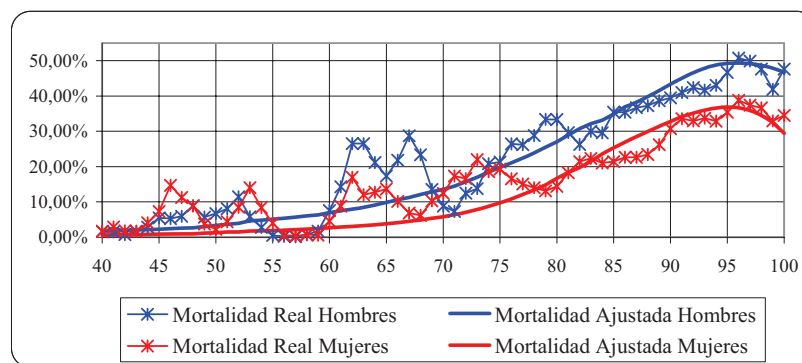


**Fuente:** Elaboración propia.

Los resultados del ajuste obtenidos difieren considerablemente de los propuestos en Boladeras (2003), siendo además, los valores de hombres y mujeres significativamente diferentes. En el caso de los hombres, el valor obtenido para  $\omega$  es de 18,90 y  $\phi$  tiene un valor de 0,1731, siendo los valores de las mujeres de 20,59 y 0,1954 respectivamente.

Los valores totales de mortalidad para dependientes según este procedimiento, que aparecen en el siguiente gráfico, reflejan un mejor ajuste de la mortalidad para dependientes que en el caso de la corrección multiplicativa fija:

**Gráfico 8**  
**Tantos de Mortalidad de Grandes Dependientes. Valores Brutos vs. Modelizados**  
**Ajuste Multiplicativo con Corrección en Función de la Edad**



**Fuente:** Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en las últimas edades modelizadas, con tantos de mortalidad decrecientes no hacen aconsejable el empleo de este procedimiento de ajuste.

### III. Correcciones mixtas

Las correcciones de tipo mixto con modificaciones de tipo aditivo y multiplicativo empleadas de forma conjunta para modelizar la sobremortalidad pretenden soslayar las deficiencias de los anteriores procedimientos analizados, incorporando por un lado, una mortalidad no asociada a los tantos de mortalidad general, y por el otro, una mortalidad que depende del comportamiento de la mortalidad general.

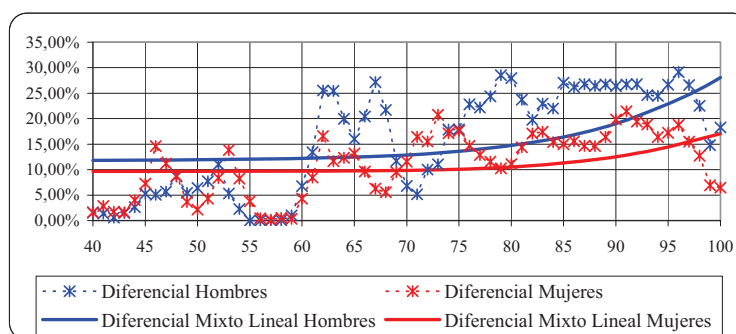
#### III.a. Corrección lineal

La corrección lineal, considerando como variable independiente la mortalidad general es el caso más extendido. Por tanto se tiene que:

$$q_x^d = q_x \times \beta + \alpha$$

El ajuste por mínimos cuadrados ordinarios del diferencial de mortalidad entre las tablas PERMF-00P y la mortalidad para grandes dependientes considerando las HID 98-01, modificadas para España, utilizando la corrección mixta lineal arroja los siguientes resultados:<sup>14</sup>

**Gráfico 9**  
Diferenciales Brutos en los Tantos de Mortalidad de Dependientes y su Ajuste  
Ajuste Mixto Lineal



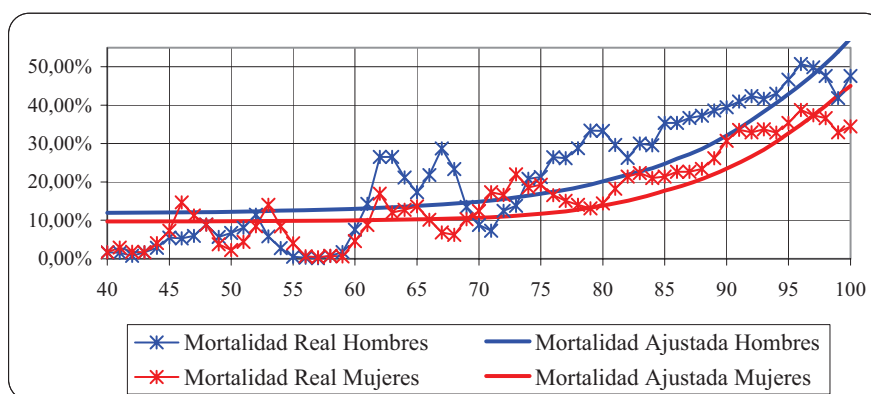
Fuente: Elaboración propia.

<sup>14</sup> El valor obtenido, en el caso de los hombres, para  $\beta$  ha sido de 0,1142 y para  $\alpha$  de 0,5583. En el caso de las mujeres los valores obtenidos son 0,0962 y 0,2655 respectivamente.

Al igual que ocurre en el caso de la corrección multiplicativa fija, esta aproximación sobrevalora la mortalidad adicional de los dependientes en los menores de 60 años y e infravalora la misma para los mayores de 70 años.

Los valores agregados de la mortalidad para dependientes según este procedimiento, que aparecen en el siguiente gráfico, muestran la deficiencia del ajuste de la mortalidad para dependientes:

**Gráfico 10**  
**Tantos de Mortalidad de Grandes Dependientes. Valores Brutos vs. Modelizados**  
**Ajuste Mixto Lineal**



Fuente: Elaboración propia.

### III.b. Corrección *Rickayzen y Walsh* modificada

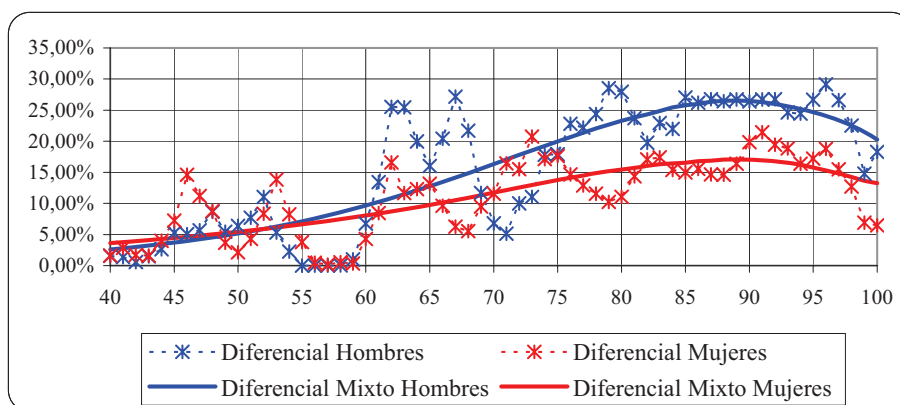
La función de ajuste de la sobremortalidad propuesta en Rickayzen y Walsh (2002), modeliza ésta, a partir de una expresión aditiva de una función recíproca de uno y una exponencial. Este ajuste hace converger la sobremortalidad a un valor fijo máximo  $\delta$ . Este método produce resultados satisfactorios si los diferenciales a modelizar no decrecen a partir de una determinada edad. Con las tablas de mortalidad GK-95 y GR-95 no hay disminución por lo que ese ajuste es muy bueno. Sin embargo los diferenciales de sobremortalidad con respecto a la tabla PERMF-00P decrecen para ambos sexos a partir de los 96 años. Para recoger este efecto, se propone en este trabajo una variación de la fórmula de Rickayzen y Walsh a partir de una corrección mixta sobre la mortalidad general para modelizar la mortalidad de los dependientes. En esta corrección mixta, se considera una modificación aditiva considerando la expresión de Rickayzen y Walsh y una

corrección multiplicativa sobre los tantos de mortalidad general que recoja la disminución de los diferenciales absolutos de mortalidad en las últimas edades de la tabla. Por tanto, la mortalidad de dependientes se obtiene de la siguiente fórmula:

$$q_x^d = q_x \times \beta + \frac{\delta}{1 + \lambda^{x_i - x}}$$

En el gráfico que aparece a continuación se refleja el ajuste, por mínimos cuadrados ordinarios, del diferencial de mortalidad entre las tablas PERMF-00P y la mortalidad para grandes dependientes considerando las HID 98-01 modificadas para España utilizando esta corrección mixta.

**Gráfico 11**  
**Diferenciales Brutos en los Tantos de Mortalidad de Dependientes y su Ajuste**  
**Ajuste Mixto con Modificación Aditiva por Edad**



**Fuente:** Elaboración propia.

Como puede apreciarse en el gráfico, el ajuste recoge la disminución en el diferencial entre la mortalidad de personas sanas y personas en estado de gran dependencia, a partir de los 95 años de edad. Los resultados en la mortalidad total, por edad y sexo, con esta corrección mixta se recogen en el siguiente gráfico: