Anales del Instituto de Actuarios Españoles, 4ª época, 25, 2009 / 77-100

MODELLING ACTUARIAL EQUITABLE TONTINES

MODELO DE EQUIDAD ACTUARIAL DE OPERACIONES TONTINAS [1]

David Villarino [*]

Máster en Ciencias Actuariales y Financieras (UC3M)

Fecha de recepción: 3 de septiembre de 2019
Fecha de aceptación: 4 de noviembre de 2019

Abstract

An increasingly aging society is a major challenge for both insurers and global pension systems, as well as for individuals themselves who may face the risk of outliving their savings. New products are needed in order to address this issue, as current life products are facing many problems to counteract the effect of longevity. In this article, we rescue tontines, a form of life insurance that became popular more than three centuries ago, that was outlawed and we present them today as an alternative to this scenario of increasing of the global longevity.

Keywords: Tontines, fair tontines, pension system, longevity.

Resumen

El aumento de la longevidad es un reto importante tanto para las aseguradoras y los sistemas de pensiones globales, como para los propios individuos que pueden enfrentarse al riesgo de vivir más años de lo que sus ahorros permiten. Los productos actuales del mercado de vida no tienen una capacidad suficiente para contrarrestar este efecto de longevidad, por lo que

---

[1] Este artículo está basado en el Trabajo Fin de Máster presentado por el autor y cuyos directores fueron los profesores José Miguel Rodríguez-Pardo del Castillo y Jesús Ramón Simón del Potro. Agradecer adicionalmente a Michael Sabin por sus aportaciones a lo largo de este trabajo.

[*] Autor para la correspondencia (davidvillarino@gmail.com)

DOI 10.26360/2019_4

existe una demanda de nuevos productos. En este artículo, rescatamos las operaciones tontinas, una forma de seguro de vida que se hizo popular hace más de tres siglos, que fue ilegalizada y que hoy presentamos como alternativa ante este escenario de incremento de la longevidad global.

Palabras Clave: Tontinas, tontinas justas, sistema de pensiones, longevidad.

1. Introducción

Según un estudio de la Universidad de Washington (Foreman, et al., 2018), España será el primer país del mundo en esperanza de vida en 2040, con una estimación de 85.8 años vividos en promedio para un recién nacido (83.6 para los hombres y 87.4 las mujeres). Si bien esto es un dato esperanzador para la vida de las personas, supone un mayor esfuerzo de gestión de los costes de jubilación y de la asistencia sanitaria y de dependencia. Todo esto, ocurre bajo un escenario de tipos de interés en mínimos históricos, lo que nos hace enfrentarnos a un reto para generar incentivos suficientes en la contratación de los seguros de vida tradicionales.

En este artículo, rescatamos un producto histórico como son las rentas tontinas y proponemos que sean una alternativa dado que, por definición, las tontinas carecen de garantías ya que generan pagos basados en la supervivencia al resto de miembros del grupo.

En el Trabajo de Fin de Máster del que este artículo ha sido extraído (Villarino, 2019), se ha repasado la historia de las tontinas desde su creación en Francia a manos de Lorenzo de Tonti, así como su situación legal en España. Si bien, esta publicación no es el lugar para profundizar sobre esta cuestión.

Nos centramos, sin embargo, en el estudio de las tontinas tradicionales y veremos cómo estas, a pesar de ser un producto muy popular en el pasado, no era justo desde un punto de vista actuarial, motivo por el que nuestro estudio se centrará en generar tontinas justas, esto es, que sean igualmente atractivas para todos los niveles de contribución y de diferentes edades. Este punto será la base de desarrollo de los apartados finales de este trabajo.

Asimismo, repasaremos la base metodológica para la obtención de resultados. Definiremos el modelo probabilístico de mortalidad y la generación de tontinas justas.

Finalmente, propondremos dos casos prácticos de tontinas equitativas. La primera aplicada de forma intuitiva con hipótesis básicas para entender su funcionamiento, donde veremos cómo las rentas tontinas generan pagos esperados proporcionales al nivel de inversión de cada asegurado y cómo a medida que este cumple años, va recibiendo mayores pagos al tener un mayor peso sobre el fondo. Como último ejemplo, pasaremos a proponer la tontina como complemento a la pensión pública, de tal forma que genere un doble impacto positivo; primero sobre el asegurado que tendrá un flujo de pagos constante en el tiempo, frente al caso anterior en el que en los primeros años los pagos eran prácticamente insignificantes, y por otro lado sobre la sostenibilidad del sistema de pensiones, al no recaer sobre este, el riesgo de que una persona reciba más pagos de los esperados inicialmente.

2. Tontina Tradicional vs Tontina Justa

2.1 Tontina tradicional

Formalmente se define en t = 0, todos los miembros m $\forall$ i=1,…,M, de la tontina aportan una cantidad de s unidades monetarias. Cuando uno de los i miembros fallece, todos los demás reciben una cantidad proporcional. Después del primer fallecimiento, cada miembro recibirá $\frac{s}{m-1}$. Tras el segundo fallecimiento, cada miembro recibirá $\frac{s}{m-1}$ y así sucesivamente hasta que fallezca el último miembro.

Si el número "m" de miembros es suficientemente grande, se producirá un número de muertes cercano a lo esperado por la probabilidad de fallecimiento de cada edad[2], de forma constante a lo largo de la vida del fondo, por lo que este producto será capaz de generar un flujo de pagos de por vida a los miembros del fondo.

La ineficiencia de la operación tontina formulada históricamente, se basa en:

---

[2] Basándonos en el teorema central del límite, a medida que el tamaño del fondo se haga más y más grande, el número de fallecimientos se acercarán más y más a lo esperado por las probabilidades de fallecimiento realistas del conjunto (unas probabilidades de fallecimiento estimadas con total certeza).

a) La heterogeneidad de la edad de la población objeto de la operación.
b) La homogeneidad del capital aportado a la operación.

Sabin (2010) propone que esta tontina es injusta, tanto para todas las edades de los distintos individuos como para todos los tipos de rentas, generando desincentivos para el total de los integrantes del fondo. Si el fondo estuviera formado por miembros con características heterogéneas, veríamos que aquellos con aportaciones iniciales menores, se verían en cierta forma financiados por los que mayores aportaciones hicieran y, por otro lado, los miembros más jóvenes, con mayores pagos esperados futuros, serían financiados por los miembros de mayor edad.

2.2 Hacia una tontina actuarialmente justa

A pesar de que es un producto fácil de entender para los participantes siendo clara su forma de proceder, este tipo de producto no es interesante para la mayoría de los miembros del fondo, ya que no es actuarialmente justo[3]. En los primeros años de su creación, la tontina empezaría a perder interés popular a medida que fueron apareciendo otros productos de seguro que garantizaban pagos constantes a lo largo de toda la vida de los asegurados, incluso garantizando estos pagos en caso de longevidad mayor que la esperada, como se puede observar en el desarrollo histórico de Villarino (2019).

Es interesante continuar unas líneas sobre este concepto de "pagos constantes incluso en caso de longevidad superior a la esperada", ya que, si criticamos a las tontinas tradicionales por no ser actuarialmente justas, deberíamos cuestionarnos si el resto de productos lo son. Según Milevsky, Salisbury, Gonzalez y Jankowski (2018) la mayoría de rentas vitalicias no están suscritas bajo la mentada justicia actuarial, ya que, en su mayoría, las rentas vitalicias tienen recargos por varios riesgos entre los que se encuentra el de longevidad. De hecho, la existencia de este riesgo, es uno de los motivos por el que se realiza este estudio.

La diferencia más notable entre el riesgo de mortalidad y el de longevidad, es que, en el primero, la incertidumbre se encuentra en el momento del fallecimiento, no sabiendo si se dará antes o después en el tiempo, si bien, conocemos a ciencia cierta cómo se distribuye la mortalidad de nuestra

[3] Donnelly (2018) define como renta actuarialmente justa, aquella cuyos pagos esperados iguala a las contribuciones aportadas por cada miembro.

población. Haciendo uso de la ley de los grandes números, este riesgo será fácilmente diversificable y su demostración es sencilla. Sin embargo, el mayor problema se da ante el riesgo de longevidad, que no es como tal, el riesgo de que una persona sobreviva durante un periodo mayor, ya que ese componente sí sería diversificable de la misma manera que en el caso de la mortalidad, sino más bien, el riesgo de que la distribución de la supervivencia de mi población no sea conocida. Este es un resultado a tener en cuenta, ya que la tendencia en los últimos años es que la longevidad mejore constantemente hasta que España se convierta en el país más longevo del mundo (Foreman, et al., 2018).

La importancia de generar un producto basado en la formación de grupos que compartan el riesgo de mortalidad, es que efectivamente, no se considera a la tontina como un seguro como tal, ya que esta no garantiza pagos bajo ningún concepto[4]. En caso de que el fondo no sea actuarialmente justo, una parte de los miembros tendrían pagos esperados por debajo de su contribución real y los otros, tendrían pagos superiores a lo contribuido. En otras palabras, unos miembros estarían subvencionando al resto. Es por esto, que la tontina debe basarse en la justicia actuarial para ser atractiva para todo tipo de miembros.

3. Metodología

En este apartado se define la base teórica utilizada para la extracción de resultados en el último punto de este artículo.

Los ejemplos de tontinas que pueden ser encontrados en Villarino (2019) tenían en común que no eran justas una vez que se mezclaban miembros de distintas edades y aportaciones al fondo. Como se ha explicado anteriormente, esto se debe a que las tontinas históricas repartían sus rendimientos de forma proporcional al número de miembros vivos, sin importar si estos hubieran aportado una mayor cantidad de dinero al fondo o si algunos miembros tuvieran una edad mayor y, por tanto, sus pagos esperados fueran menores que los de otros miembros con menor edad, los cuales tendrían unas expectativas de supervivencia mayores.

---

[4] Si el asegurado fallece antes de llegar a la ventana de prestaciones, la tontina no generará ningún. Así mismo, si llegado el periodo de pagos, no se da ningún fallecimiento, tampoco recibirán pagos por la mortalidad de otros miembros

Sabin (2010) propone una solución a estas tontinas, de forma que sean justas para todos los miembros. Esto es, aquellos miembros de mayor edad, y por tanto, con menores probabilidades de supervivencia, deberían recibir una mayor proporción de los pagos por el fallecimiento de otros miembros. De la misma manera, los miembros que mayores aportaciones iniciales hubieran hecho al fondo, deberían asimismo, recibir una cantidad mayor.

Esta solución, fue denominada por este autor como *fair transfer plan* (FTP), resumiendo en su nombre la idea de que, mediante la asignación de pesos, se generaría una alternativa de tontina justa para todos los miembros del grupo, una vez que se tuviera que realizar el reparto de las contribuciones de los fallecidos.

3.1 Modelo probabilístico de tablas de mortalidad

En este apartado se definen las bases del modelo de mortalidad elegido. Las tablas de mortalidad elegidas para hombre y mujer son las PASEM 2010 (tabla 1), elaboradas a petición de UNESPA sobre la población aseguradora española[5][6].

Tabla 1
Muestra de la Tabla de Mortalidad PASEM para Mujer y Hombre

Edad	Mujer	Hombre	Edad	Mujer	Hombre
0	0.004744	0.005807	30	0.000277	0.000767
1	0.000376	0.000418	31	0.000301	0.000755
2	0.000307	0.000349	32	0.000328	0.000755
…	…	…	…	…	…
45	0.001586	0.002439	60	0.004801	0.009793
46	0.001707	0.002727	61	0.00503	0.01035
47	0.00185	0.003048	62	0.005293	0.010892
…	…	…	…	…	…
100	0.531667	0.5268	111	0.973152	0.9876
101	0.559229	0.58387	112	1	1

Fuente: Elaboración propia mediante datos de UNESPA.

[5] Más información sobre estas tablas puede ser encontrada en https://unespa-web.s3.amazonaws.com/main-files/uploads/2017/06/Tablas-mortalidad-PASEM2010.pdf

[6] La elección de estas tablas no es de gran importancia para la realización de este trabajo, si bien, han sido elegidas ya que fueron creadas a partir de una muestra significativa del mercado español e informan de mayores probabilidades de supervivencia en edades altas, que otras tablas consultadas, como las utilizadas por la Seguridad Social. Estas tablas se utilizarán, no para tarificar un producto, sino para determinar durante cuánto tiempo, la Seguridad Social o una entidad aseguradora deberá pagar a sus pensionistas o asegurados en el posterior experimento de este trabajo, por lo que, a mayores tasas de supervivencia, mayores serán las cargas para estas entidades por pagos futuros y más necesario será complementar a estos sistemas con rentas vitalicias tontinas.

Empezamos por definir ε como una variable aleatoria que representa la edad en años en el momento de la muerte de una persona. Esta variable, de tipo continuo en el tiempo, tendrá valor 0 en el nacimiento de la persona e irá creciendo en forma de entero a medida que pasan los años. Tendremos asimismo, la probabilidad de fallecer en un periodo de un año concreto dado que la persona ha llegado viva a esa edad $Pr\{n < \varepsilon \leq n + 1 \mid \varepsilon > n\}$.

Y mediante la siguiente recursión,

$$Pr\{n < \varepsilon \leq n + 1\} = Pr\{\varepsilon \leq n\} + (1 - Pr\{\varepsilon \leq n\})Pr\{n < \varepsilon \leq n + 1 \mid \varepsilon > n\},$$

podemos definir la función de distribución de mortalidad para cada edad entera como:

$$F(n) = Pr\{\varepsilon \leq n\}.$$

De forma continua en el tiempo podemos definir:

$$F(t) = Pr\{\varepsilon \leq t\},$$

que, mediante la interpolación de edades enteras con el método de fuerza de mortalidad constante, llegamos a:

$$F(t) = 1 - \big(1 - F(n)\big)\left(\frac{1 - F(n+1)}{1 - F(n)}\right)^{t-n}, n < t < n + 1. \#(1)$$

De esta forma tendremos un *hazard rate,*

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

constante en cada intervalo $(n, n + 1)$, donde $f(t)$ es la función de densidad de $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.

Las tablas de mortalidad serán leídas de tal forma que si el miembro i seleccionado en la tontina es un hombre, tendrá una función de distribución tal que, $F_i(t) = F_{PASEM\ hombre}(t - t_i)$ y $F_i(t) = F_{PASEM\ mujer}(t - t_i)$ para el caso de mujer, donde t_i es el momento de nacimiento del individuo y siendo en ambos casos la distribución para $\varepsilon_i, F_i(t) = Pr\{\varepsilon_i \leq t\}$. Adicionalmente, sabemos que por la interpolación en (1), la probabilidad de que se den dos fallecimientos en el mismo instante de tiempo es cero.

3.2 Fair transfer plan

Definiremos a continuación de modo formal cómo se estructura este método de generación de tontinas justas, basándonos en la definición de Sabin (2010). Tras esto, pasaremos a desarrollar el algoritmo que finalmente utilizaremos para generar tontinas como complemento al sistema de pensiones de la Seguridad Social.

- *Definición*

En el momento de creación del fondo, estará formado por un número m de miembros de cualquier edad y sexo. Identificamos a cada miembro con un índice, siendo $i = 1, 2, \dots, n$. Adicionalmente, se definen las variables aleatorias $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ como el momento en el tiempo en el que fallecerá cada miembro. Con esta información, se definirá $\tau = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ siendo τ el instante en el que se da el siguiente fallecimiento de un miembro del fondo.

Mientras no fallezca ningún miembro del fondo, esta tontina no generará ningún rendimiento, por lo que empezaremos buscando el instante en el que uno de los miembros fallece, por lo que la probabilidad de que el miembro *j* fallezca es; $p_j = Pr\{\tau = \varepsilon_j \mid \tau = t\}$. La probabilidad entonces, de que el miembro *j* fallezca en el intervalo $(t, t + \Delta]$ dado que nadie ha fallecido antes de t es:

$$\frac{F_j(t+\Delta) - F_j(t)}{1 - F_j(t)} \approx \frac{\Delta f_j(t)}{1 - F_j(t)} = \Delta\mu_j(t),$$

siendo $\mu_j(t)$ el *hazard rate.* Podemos asumir que si Δ es pequeño, la probabilidad de fallecimiento de dos personas es cero y asumimos también por tanto, que las diferentes ε_j son independientes. La probabilidad de fallecimiento de un individuo en el periodo de tiempo Δ es aproximadamente $\sum_i \Delta\mu_i(t)$ y proporcional a:

$$p_j = \lim_{\Delta \to o} \frac{\Delta\mu_j(t)}{\sum_{i=1}^{m} \Delta\mu_i(t)} = \frac{\mu_j(t)}{\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t)}.$$

La probabilidad de fallecimiento conjunta en $(t, t + \Delta]$ es $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Definimos ahora, J que será el miembro j que fallecerá en el siguiente instante de tiempo con total seguridad y cuyo balance s_j será redistribuido entre el resto de los miembros i del fondo. También definimos $\alpha_{i,j}$ como la proporción de este balance s_j que el miembro i va a recibir. Adicionalmente, sabemos que si $i = j$, este será el miembro fallecido y si no se cumple la igualdad, i será uno de los miembros supervivientes. Finalmente, es sencillo ver que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} = 0$ ya que la cantidad que los miembros se reparten, es la misma cantidad que aquella sobre la que el miembro j pierde el derecho al fallecer.

La cantidad aleatoria a percibir por cada miembro (aleatoria ya que depende de si el miembro continúa vivo o no en el siguiente periodo) es:

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} s_j I_j(J),$$

siendo en este caso I_j un indicador de si el miembro $i = J$, en cuyo caso el valor de I_j será cero. Y tendremos un pago esperado tal que:

$$ER_i = \sum_{j=1}^{m} p_j \alpha_{i,j} s_j$$

Adicionalmente, esta proporción $\alpha_{i,j}$ habrá de satisfacer las siguientes condiciones:

$\alpha_{j,j} = -1$ para $j = 1, 2, \dots, m,$ (2)

$0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1$ para $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j,$ (3)

$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} = 0$ para $j = 1, 2, \dots, m,$ (4)

$\sum_{j=1}^{m} p_j \alpha_{i,j} s_j = 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $p_j = \frac{\mu_j(t)}{\sum_{j=1}^{m} \mu_i(t)}.$ (5)

Una vez definido esto, se dice que toda combinación de $\alpha_{i,j}$ que satisfaga estas condiciones (2, 3, 4 y 5), es un FTP. De esta forma tenemos que un FTP es aquel reparto que hace que el capital del fallecido sea equitativamente distribuido entre todos los miembros vivos y que, por tanto, la esperanza de los pagos futuros de cada miembro sea 0.

- *Ejemplos de FTP*

Se desarrolla a continuación la estructura matricial de una tontina con $m = 5$.

$$\begin{matrix} -1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} & \alpha_{1,5} \\ \alpha_{2,1} & -1 & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} & \alpha_{2,5} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & -1 & \alpha_{3,4} & \alpha_{3,5} \\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & -1 & \alpha_{4,5} \\ \alpha_{5,1} & \alpha_{5,2} & \alpha_{5,3} & \alpha_{5,4} & -1 \end{matrix}$$

Tenemos una matriz 5x5, donde vemos en cada columna un posible escenario. En cada escenario, se da el fallecimiento de uno de los i miembros. El miembro fallecerá o no. En caso de fallecer se le asignará un -1, lo que significa que pierde su contribución inicial. Es fácil ver, que en cada escenario, fallecerá el miembro $\alpha_{i,i}$ del i escenario contrastado, por ejemplo, en el escenario 1, fallecerá el primer individuo.

En caso de no fallecer, se le asignará un peso $\alpha_{i,j}$ mediante el algoritmo. Adicionalmente, vemos que la suma de cada columna es 0, ya que, por ejemplo, en el primer caso, donde fallece el miembro 1, este pierde su derecho sobre su contribución inicial, que será repartida entre el resto de miembros.

4. Resultados

Para la generación de resultados, se ha empleado una base de datos basada en las cotizaciones de la Seguridad Social por tramos de cuantía[7]. Para su elaboración se ha procedido a generar una muestra poblacional, basándonos en los rangos dentro de cada tramo de cuantía y en el número de cotizantes por tramo. Una vez hecho esto, se han extraído los estadísticos principales de la muestra (media, varianza, curtosis y asimetría) con el objetivo de tener la capacidad de generar distintos tamaños muestrales mediante el software estadístico R.

De esta forma conseguimos generar el vector de aportaciones de cada individuo, como un porcentaje de esta cotización. Tras esto, como paso final en la generación de individuos representativos con los que simular los siguientes ejemplos de tontina justa, hemos asignado aleatoriamente una edad y sexo para cada uno de los individuos.

[7] Seguridad Social (2019), Pensiones contributivas en vigor, por tramos de cuantía. Disponible en: http://www.seg-social.es/wps/portal/wss/internet/EstadisticasPresupuestosEstudios/Estadisticas/EST23/EST24/EST195

4.1 Tontina justa

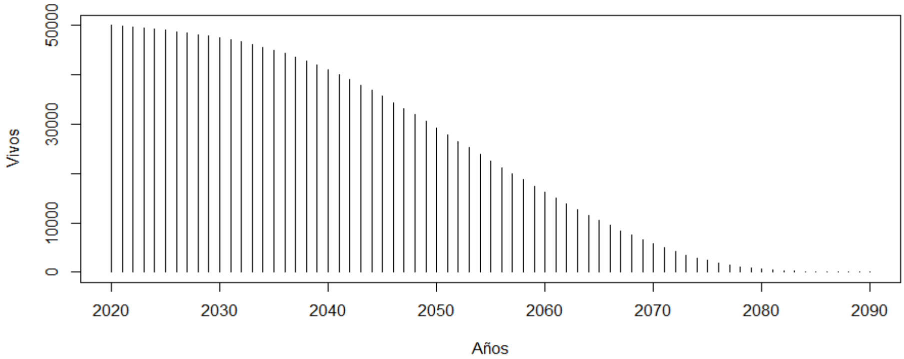

Figura 1. Número de vivos a lo largo de la vida de la tontina 2020 – 2082. Fuente: elaboración propia.

Se definen a continuación las características de este primer experimento.

- El modelo de mortalidad utilizado es el definido en el apartado anterior, habiendo sido utilizadas las tablas de mortalidad PASEM 2010.
- Para la generación de pagos se ha utilizado un algoritmo de generación de FTPs.
- Se han generado pagos en función de los fallecimientos anuales.
- El tamaño elegido para este fondo es de 50,000 miembros sin reposición.

Para la realización de este experimento, ha sido creado un fondo compuesto por las aportaciones de 50,000 personas, distribuidas indistintamente entre hombres y mujeres, y con también, distintas contribuciones iniciales. La edad de entrada para este experimento ha sido aleatoriamente generada y su rango es de 30 a 65 años.

Tabla 2
Dinámica de la Tontina 2020 – 2089 (miles de euros)

Año	Vivos	Fallecidos	Reparto	Año	Vivos	Fallecidos	Reparto
2020	50,000	191	93,941.82	2055	22,528	1,312	612,909.78
2021	49,809	181	88,788.42	2056	21,216	1,251	574,917.84
2022	49,628	217	98,213.22	2057	19,965	1,249	578,915.40
2023	49,411	197	90,296.22	2058	18,716	1,269	585,950.82
2024	49,214	212	105,425.88	2059	17,447	1,277	593,796.84
2025	49,002	263	130,084.08	2060	16,170	1,200	572,509.56
…	…	…	…	…	…	…	…
2035	45,018	634	290,438.40	2070	5,709	803	372,529.92
2036	44,384	729	332,720.64	2071	4,906	715	329,399.28
2037	43,655	802	352,855.02	2072	4,191	684	320,210.52
2038	42,853	884	409,280.34	2073	3,507	582	252,347.76
2039	41,969	924	417,171.30	2074	2,925	522	238,617.96
2040	41,045	970	456,272.88	2075	2,403	464	214,219.74
…	…	…	…	…	…	…	…
2050	29,226	1,371	626,366.16	2085	63	28	12,219.06
2051	27,855	1,311	603,756.72	2086	35	15	7,234.08
2052	26,544	1,319	608,383.44	2087	20	11	4,249.56
2053	25,225	1,338	635,872.02	2088	9	5	1,240.26
2054	23,887	1,359	646,301.88	2089	4	3	1,648.50

Fuente: Elaboración propia.

Los pagos generados solo hacen referencia a los pagos por mortalidad de otros miembros del grupo, siendo este, el valor de la contribución inicial al fondo por parte de cada individuo. Para simplificar este primer experimento, estas contribuciones no han sido reinvertidas, esto es, no generan ningún rendimiento adicional. Por lo que, tras cada fallecimiento, la cantidad que se repartirá entre los miembros supervivientes será el valor de la contribución inicial al fondo por parte de cada individuo.

Podemos ver en la tabla 2 una representación de la tontina entre 2020 y 2089, con la dinámica de fallecidos y el reparto de su contribución al resto de individuos que siguen vivos. En un inicio, el fondo está formado por 50,000 personas, las cuales tienen un máximo de edad de 65 años, por lo que esperamos un número de fallecimientos pequeño. A medida que los años de vida del fondo van aumentando, se espera una probabilidad de fallecimiento del conjunto superior, por lo que, año tras año, se genera una proporción de muertos mayor, hasta que, en el año 2053, tras 33 años de vida de la tontina, ya ha desaparecido la mitad del grupo inicial. La tontina, en este caso, dejará de generar pagos al finalizar el año 2089, donde el número de individuos vivos es solo 1, recibiendo este, un último pago de 1.6 millones de euros, esto es, la suma de las contribuciones iniciales de los tres últimos fallecidos.

Vemos adicionalmente en la tabla 3 una extracción de los pagos por mortalidad de la persona de 30 años que más años ha vivido, falleciendo un periodo antes del cierre del fondo. En este caso, su contribución inicial fue de 19,320€ y es mujer. Esta contribución es de las menores del fondo, lo que sumado a que, con 30 años y siendo mujer, la probabilidad de fallecimiento a un año vista es de 0.000277 según la tabla de mortalidad PASEM, hace que los pagos por mortalidad durante los primeros años sean insignificantes.

Se puede observar que los rendimientos anuales de esta tontina son muy bajos y no llegan siquiera a 100€ hasta los 63 años. A partir de los 75 años, la tontina empieza a generar rendimientos por mortalidad superiores al 2.5% sobre la contribución inicial, de más de un 5% a los 80 años y es a partir de este momento, cuando la tontina comienza a generar rendimientos mucho más altos que cualquier producto de seguro de vida promedio. A los 85 años, su rendimiento acumulado a lo largo de este fondo es ya de más de 18,000€ y llegará a generar ganancias del 130% y del 180% en sus últimos años de vida. En 2089, este miembro habrá fallecido, por lo que la tabla informa del valor de su contribución, sobre la que perderá su derecho a cobro y que pasará a formar parte de las ganancias del último individuo vivo. En el momento en el que solo queda un superviviente, se debería generar una nueva tontina para las siguientes generaciones, ya que este experimento no ha sido configurado con el objetivo de ser continuo en el tiempo.

Tabla 3
Dinámica de la Tontina 2020-2089. Mujer de 30 años.

Año	Edad	Pago	Año	Edad	Pago
2020	30	6.16	2071	81	1,331.85
2021	31	5.9	2072	82	1,698.40
2022	32	6.62	2073	83	1,706.67
2023	33	6.24	2074	84	2,121.77
2024	34	7.71	2075	85	2,528.02
2025	35	10.16	2076	86	3,185.75
...	...	...	2077	87	3,517.42
2035	45	29.5	2078	88	3,724.39
...	...	...	2079	89	5,086.59
2040	50	47.98	2080	90	6,060.56
...	...	...	2081	91	7,902.59
2050	60	92.85	2082	92	6,968.05
...	...	...	2083	93	11,293.74
2060	70	226.95	2084	94	13,218.74
2061	71	242.1	2085	95	13,470.24
2062	72	284.61	2086	96	15,500.88
2063	73	337.93	2087	97	26,174.70
2064	74	421.27	2088	98	36,316.80
2065	75	519	2089	99	-19,320.00

Fuente: Elaboración propia.

Este caso ha sido ilustrado ya que, como se ha comentado, el individuo de estudio ha sido el más joven de los últimos supervivientes. Si bien, su escasa contribución inicial ha hecho que los rendimientos generados no sean atractivos. En la figura 2 se observa la comparativa de ganancias sobre contribución de la población de edad 35, 45, 55 y 65.

Si nos colocamos en 2030, cuando las edades son 45, 55, 65 y 76 años respectivamente, podemos localizar dos individuos (45, 55) que no están recibiendo grandes pagos en proporción a su contribución, ya que sus probabilidades de fallecimiento son aún muy bajas, sin embargo, el miembro de 65 se encuentra ante un momento de aceleración de sus pagos y el de 75 años está recibiendo ya rendimientos en torno al 5% de su contribución inicial. El crecimiento de los pagos de este último, crecerán exponencialmente hasta su fallecimiento, mientras que los dos individuos de menor edad seguirán recibiendo pagos por debajo del 5% de su contribución.

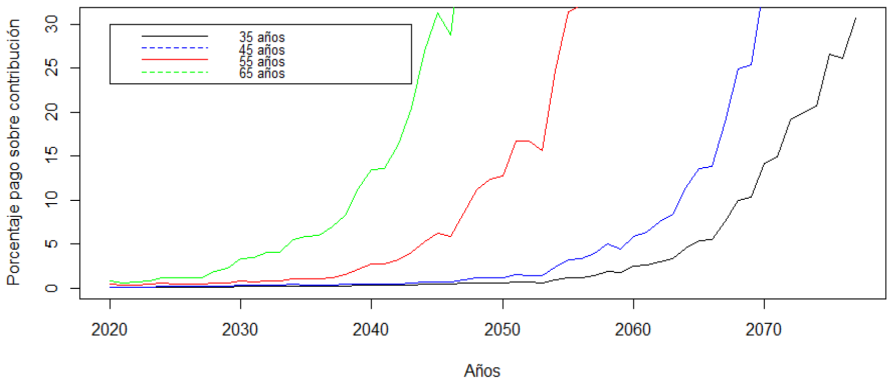

Figura 2. Comparativa de Pagos sobre Contribución para Personas de Edad 35, 45, 55 y 65 (porcentajes). Fuente: Elaboración propia.

Se observa que aquellas personas de menor edad, perciben la renta durante un mayor número de años. Si bien, para cualquier año seleccionado en el que haya dos grupos de edad distinto, se aprecia que aquellos de mayor edad están recibiendo una ganancia mayor. Este resultado es de gran interés para este estudio, ya que vemos que, a igual contribución, se cumple que los mayores individuos habrán de percibir mayores rentas para contrarrestar su desventaja en cuanto a menor esperanza de pagos futuros. Esto confirma que el método de reparto propuesto en nuestro experimento, es justo actuarialmente, por lo que miembros de distintas edades tendrán incentivos suficientes para agruparse bajo un mismo fondo de tontinas, en contra de lo que ocurría con las tontinas tradicionales.

Otro resultado que podemos extraer de este experimento, es que si bien, el mecanismo de reparto es justo, podría no ser atractivo para un ahorrador que quiera recibir un flujo constante de pagos a partir de, por ejemplo, el momento de su jubilación. Proponemos a continuación, un siguiente ejemplo donde con ciertas mejoras al producto, conseguiremos generar un mayor atractivo para la parte contratante.

4.2 Tontina como complemento a la pensión en España

En este segundo experimento, se propone que la tontina complemente a un sistema de pensiones como puede ser el de España. Hemos visto en el ejemplo anterior, que la tontina genera rendimientos consistentes, una vez que el individuo, ahora pensionista, supera un rango de edad que por lo general se encuentra por encima de los 75 años.

En este caso, se propone como ejercicio final, que los pagos a los pensionistas, sean el resultado de la suma de los rendimientos por mortalidad vistos en el experimento anterior, más el cobro habitual de la pensión pública por jubilación. De esta forma, cada trabajador, a lo largo de su vida laboral, generará un derecho de cobro mediante sus cotizaciones a la Seguridad Social, que se traducirá en esta renta de carácter vitalicio. Cumpliremos, así pues, el principio de proporcionalidad contributiva sobre el que se basa el sistema actual.

Nuestro objetivo con el siguiente experimento, es generar un flujo constante de pagos en el tiempo, que permita al jubilado un flujo de pagos constante en el tiempo, desde el mismo momento de jubilación. Este será un resultado deseable tanto para el propio pensionista, como para la sostenibilidad del sistema de pensiones.

Las características de esta pensión complementada con una renta tontina son:

- El modelo de mortalidad es el mismo que en el caso anterior, habiendo sido utilizadas las tablas de mortalidad PASEM 2010.
- Los pagos acordes al FTP han sido generados como hemos explicado anteriormente.
- Se han generado pagos en función de los fallecimientos anuales. Adicionalmente, cada miembro percibe el pago de la pensión de jubilación en función de su cotización.
- Los pagos se realizarán a partir de los 65 años.
- El tamaño elegido para este fondo es de 500,000 miembros con reposición.

El tamaño del fondo ha sido incrementado a 500,000 personas, con el objetivo de generar suficientes pagos por mortalidad y replicar lo que sería un sistema de pensiones público, donde el número de miembros es elevado.

Una de las principales novedades respecto al caso anterior, es que, en este experimento, la tontina nunca llega a un final. Cada vez que fallece un miembro, un nuevo individuo es generado, con la edad de 65 años y un derecho de cobro de pensión, basado en su cotización histórica. De esta forma, se está creando un escenario que no tiene fin, y que puede replicar un sistema de pensiones continuo en el tiempo, a diferencia del caso anterior, donde la tontina era disuelta cuando fallecía el penúltimo miembro.

El momento del primer pago por mortalidad, coincide con el primer pago por la pensión de jubilación. Hemos visto en el caso anterior, que los pagos por mortalidad, en los primeros 65 años de vida, eran prácticamente insignificantes, por lo que la diferencia del planteamiento es prácticamente inapreciable.

Para explicar este experimento, vamos a apoyarnos en la tabla 4 donde podemos ver los pagos anuales por la pensión con tontina de una mujer que en el momento de la creación de este sistema de pensiones tenía 65 años y fue la más longeva de su generación.

El resultado principal está en la última columna y se puede extraer, que esta persona va a tener un derecho de cobro por pensiones de algo más de 27,000€, que recibirá de forma mensual tal y como es habitual. Simplificando, este derecho de cobro se calculará, por ejemplo, en base a las cotizaciones de los últimos 25 años, tal y como es de aplicación hoy en día en España. De esta forma, podemos asumir que cada integrante del fondo, habrá generado un derecho de cobro de una pensión de carácter vitalicio por un valor anual, que en este caso es de unos 27,000€.

La diferencia con un sistema de pensiones tradicional, es que el derecho de cobro se repartirá entre unos pagos por mortalidad, dados por el fallecimiento de los otros miembros mayores de 65 años y una parte que compensa a estos pagos hasta llegar a sumar el valor total de la prestación que cobrará el asegurado.

En los primeros años, se puede ver que el mayor peso de la pensión lo soporta el sistema de pensiones público, sin embargo, tal y como ocurriría en el ejemplo de una tontina clásica, a medida que el pensionista cumple años y su peso relativo en el fondo aumenta, los pagos por mortalidad van también en aumento.

El individuo de interés en este ejemplo, nunca dejará de percibir una cantidad cercana a los 27,000€, sin embargo, la ventaja de este sistema está en que el sistema de pensiones se desprende del riesgo de longevidad de sus pensionistas, ya que cuando uno de los individuos supera la edad de fallecimiento promedio, no es el fondo de pensiones el que asume esos pagos, sino que este riesgo es compartido por los pensionistas.

Un resultado que se puede observar en la tabla 3, es que la proporción de la pensión asumida por los fallecimientos de otros miembros, va en aumento y a partir de los 85 años, ya supera a los pagos asumidos por el sistema público de pensiones. Los pagos por fallecimiento, al igual que en el caso anterior, provienen de la contribución de los miembros fallecidos y esta contribución no es otra cosa, que el derecho de cobro de pensiones acumulado mediante sus cotizaciones.

De esta forma, es posible cuantificar las obligaciones de pago del sistema de pensiones, si las tablas de mortalidad son precisas, ya que una vez calculada cuál es la pensión de cada uno de los contribuyentes, este sistema de pensión complementada con una renta tontina, se encargará de generar los pagos precisos.

En este ejemplo, el individuo ha ido consumiendo su derecho por pensiones hasta que, en el momento de su fallecimiento, a los 102 años, devuelve al fondo 16,446€ que serán repartidos entre los miembros supervivientes y, en este caso, entre los nuevos miembros que se incorporan con edad 65 años, al fondo cada vez que un miembro fallece.

Finalmente, de forma gráfica podemos ver (figura 4) cómo mediante el cobro de una pensión decreciente y unos pagos crecientes por fallecimiento de otros pensionistas, este individuo es capaz de recibir un pago constante en el tiempo de 27,000€. Para este ejemplo, se ha decidido generar pagos constantes. La teoría económica dice que el patrón de consumo en el tiempo es decreciente una vez llegado a la edad de jubilación, si bien, en este caso, un patrón de consumo constante podría interpretarse como una mayor necesidad de flujos monetarios por mayores costes sanitarios o de dependencia.

Variar estas hipótesis de consumo no sería complicado en el experimento de la pensión con tontina, si bien, su justificación, mediante el uso de modelos de *prospect theory*, requiere de un estudio mayor sobre esta rama económica y se propone como punto a desarrollar en futuras investigaciones[8].

---

[8] Más información sobre la aplicación de distintos patrones de consumo a las tontinas en Twersky y Kahneman (1992), RuB y Schelling (2018) y Weinert y Gründl (2017).

Tabla 3
Pensión con Tontina

Año	Edad	Pensión	Pago mortalidad	Pago total
2020	65	25,120.09	2,110.33	27,230.42
2021	66	24,920.89	2,296.52	27,217.41
2022	67	24,599.33	2,616.58	27,215.91
2023	68	24,306.75	2,915.48	27,222.23
2024	69	24,093.66	3,133.83	27,227.49
2025	70	23,802.79	3,434.91	27,237.70
2026	71	23,623.75	3,616.97	27,240.72
2027	72	23,442.65	3,792.08	27,234.73
2028	73	22,890.27	4,326.06	27,216.33
2029	74	21,986.83	5,225.15	27,211.98
2030	75	21,047.07	6,160.48	27,207.55
2031	76	20,463.42	6,744.37	27,207.79
2032	77	19,915.03	7,284.67	27,199.70
2033	78	19,197.41	8,001.38	27,198.79
2034	79	18,653.55	8,512.35	27,165.90
2035	80	17,664.08	9,500.99	27,165.07
2036	81	16,542.96	10,679.77	27,222.73
2037	82	16,029.00	11,182.66	27,211.66
2038	83	15,042.62	12,173.75	27,216.37
2039	84	14,125.14	13,093.26	27,218.40
2040	85	13,298.15	13,887.99	27,186.14
2041	86	12,185.35	15,014.05	27,199.40
2042	87	11,257.35	15,955.15	27,212.50
2043	88	10,298.82	16,945.83	27,244.65
2044	89	9,441.40	17,830.02	27,271.42
2045	90	8,477.45	18,885.14	27,362.59
2046	91	8,032.79	19,256.88	27,289.67
2047	92	7,128.64	20,170.49	27,299.13
2048	93	6,425.55	20,907.83	27,333.38
2049	94	5,909.63	21,396.64	27,306.27
2050	95	5,365.13	21,895.04	27,260.17
2051	96	4,844.75	22,364.08	27,208.83
2052	97	4,473.13	22,564.49	27,037.62
2053	98	3,908.27	23,058.44	26,966.71
2054	99	3,351.24	23,712.98	27,064.22
2055	100	3,071.58	23,903.58	26,975.16
2056	101	3,026.59	24,025.46	27,052.05
2057	102	0.00	-16,446.22	-16,446.22

Fuente: elaboración propia.

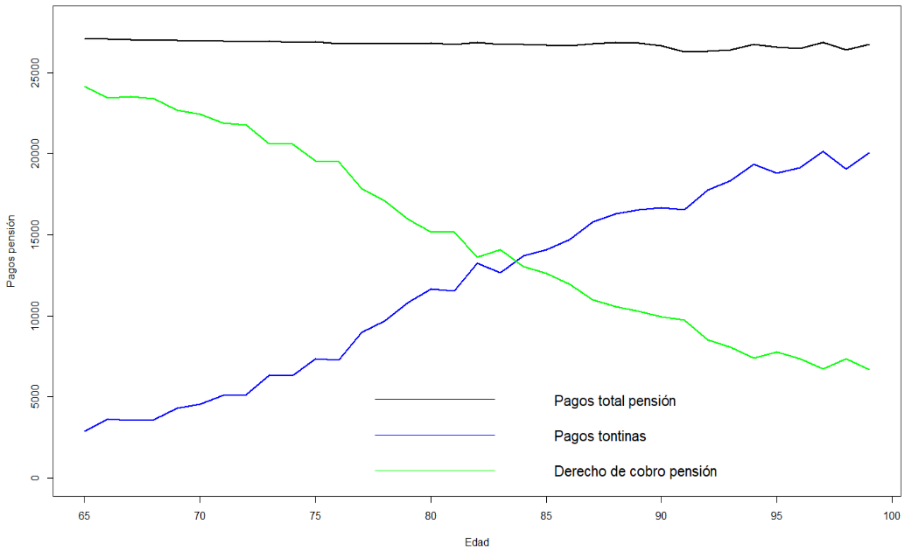

Figura 4. Pagos Obtenidos por una Pensión Complementada con Renta Tontina. Fuente: elaboración propia.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado un mecanismo de reparto de tontinas justas. Este sistema permite la formación de fondos de tontinas con miembros de diferentes edades y que aporten distintos niveles de contribución.

Una vez definida la metodología a seguir, se aplicó a un caso práctico donde hemos visto que las tontinas son efectivamente productos actuarialmente justos, capaces de generar incentivos a miembros de características generacionales y de niveles de contribución muy dispares. De esta forma, se plantean las tontinas en este trabajo, como una alternativa a otros productos vitalicios ofrecidos por las aseguradoras de forma tradicional, a los que sí les afecta el riesgo de longevidad.

Finalmente, se ha propuesto que, para paliar los efectos de la incertidumbre que genera el aumento de longevidad sobre las obligaciones de pago del sistema público de pensiones, se complemente este sistema con una renta tontina vitalicia, la cual distribuya el riesgo de longevidad entre los mismos pensionistas. Mediante este último experimento, se ha visto que este sistema es capaz de generar un flujo de pagos constantes de forma vitalicia para todos los jubilados.

Este trabajo, ha acercado una posible solución al problema actual de insostenibilidad del sistema de pensiones en España. Si bien, un posible ámbito de actuación para futuras investigaciones sería prever cómo llevar a cabo una adaptación hacia un nuevo sistema, minimizando el impacto sobre las personas que se encuentran actualmente recibiendo la pensión por jubilación del sistema vigente. Adicionalmente, una limitación a este trabajo es que hemos asumido que toda la población tiene la capacidad de generar cotizaciones para poder aportar a un fondo de tontinas y no hemos tenido en cuenta las diferentes situaciones reales de la economía en España, como son; personas que se encuentran ya en la fase de jubilación, personas en desempleo de larga duración que puedan no conseguir una contribución individual suficiente, o personas pertenecientes a colectivos con difícil integración en el mercado laboral. Esto ha de desarrollarse en futuras investigaciones.

También hemos comentado que el resultado final, en el que una persona estuviera recibiendo un pago anual constante durante toda su jubilación, podría no ser eficiente para según qué tipo de preferencias de consumo. Esto es estudiado por la teoría económica mediante modelos de *prospect theory* y queda abierta como una posible línea de actuación futura.

Referencias

Donnelly, C. (2018). Actuarial fairness and solidarity in pooled annuity funds. *ASTIN Bulletin,* 45, 49-74.

Foreman, K. J., Marquez, N., Dolgert, A., Fukutaki, K., Fullman, N., McGaughey, M., ..., y Murray, C. J. L. (2018). Forecasting life expectancy, years of life lost, and all-cause. *Global Health Metric,* 392, 2052-2090.

Milevsky, M. A., Salisbury, T. S., Gonzalez, G., y Jankowski, H. (2018). *Annuities versus Tontines in the 21st Century*. Society of Actuaries.

Ruß, J., y Schelling, S. (2018). Multi cumulative prospect theory and the demand for Cliquet-Style Guarantees. *The Journal of Risk and Insurance,* 85(4), 1103-1125.

Sabin, M. (2010). Fair tontine annuity. *Social Science Research Network Working Paper Series.*

Twersky, A., y Kahneman, D. (1992). Advances in Prospect Theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323.

Villarino, D. (2019). *Rentas tontinas justas. Aplicación al Sistema de Pensiones como alternativa ante el riesgo de longevidad.* Trabajo de fin de Máster Universidad Carlos III, Madrid, España.

Weinert, J.H., y Gründl, H. (2017). The Modern Tontine: An innovative instrument for longevity risk management in an aging society. *International Center for Insurance Regulation*, 22/2016.

Anexo

En este anexo se complementa el epígrafe 3.2 mediante la generación de ejemplos numéricos que explican en qué consiste el FTP.

Descriptivos de los Miembros de una Tontina de Tamaño 4.

i	Edad	Género	q_x	$\mu_i(x)$	p_i
1	33	Hombre	0.000774	0.000336274	0.026068776
2	60	Mujer	0.004801	0.002090069	0.162027182
3	65	Hombre	0.012703	0.005552183	0.43041856
4	70	Mujer	0.011267	0.004920971	0.381485482

Fuente: Elaboración propia.

Centrándonos ahora en los ejemplos numéricos, en la tabla tenemos el primer ejemplo de tontina. En esta, vemos un índice que identifica a cada miembro, seguido por su edad, género, q_x extraída de las tablas PASEM dependiendo del sexo del individuo i y de su edad, su *hazard rate* calculado como $\mu_i(x) = -\ln(1 - q_x)$, su contribución a la tontina s_i y finalmente la columna p_i que informa de la probabilidad de fallecimiento de cada miembro, dado que uno de ellos va a fallecer[9].

[9] Este cálculo se lleva a cabo ya que, es necesario llevar a uno de los miembros a su fallecimiento en el momento *t* definido en cada ejemplo, para contrastar los resultados del FTP.

En el primer ejemplo, se ha generado un FTP considerando que la contribución de todos los miembros es la misma (1,000€), por lo que los pesos en función de $p_i s_i$ (siendo s_i la contribución del miembro i) de cada individuo, se determinarán según sus probabilidades condicionadas de fallecimiento. Esperamos por tanto, que aquel individuo con mayor p_i reciba un pago mayor de la tontina en caso de no ser quien fallezca, para que este sistema sea justo, ya que, como hemos explicado anteriormente, se entiende que aquellos individuos con mayores edades y por tanto con menos años esperados de vida, reciban mayores pagos para igualar las cuantías totales de los pagos esperados de todos ellos.

Ejemplo 1
FTP con Contribución de 1,000€ de todos los Miembros

$$\begin{matrix} -1 & 0.0169 & 0.0344 & 0.0224 \\ 0.1051 & -1 & 0.2346 & 0.1528 \\ 0.5673 & 0.6233 & -1 & 0.8248 \\ 0.3275 & 0.3598 & 0.7310 & -1 \end{matrix}$$

En caso de que el miembro de menor edad (i = 1) fallezca, su contribución de 1,000€ se repartiría entre los miembros 2, 3 y 4. Debido a que el hombre de 65, tiene una probabilidad de fallecimiento mayor que la del resto de individuos, en este caso su rendimiento por el fallecimiento del primer miembro será de $R_3 = 0.5673\,x\,1{,}000€ = 567.30€$. Del mismo modo, vemos que el rendimiento de la mujer de 70 años, cuya q_x es menor según las tablas de mortalidad utilizadas, será inferior, y en este caso recibiría un total de 327.5€. Finalmente, el miembro más joven, recibirá un pago de 105.1€. Esta cantidad tan pequeña que tan solo llega a un 18.5% de los 567.3€ que recibe el miembro 3, se debe a que existe una probabilidad mayor de que este miembro de 60 años, sobreviva al fallecimiento de los otros dos, por lo que, llegado el momento, recibirá las contribuciones inicialmente aportadas por ambos. De esta forma, el sistema propuesto es actuarialmente justo.
De forma similar, en las columnas 2, 3 y 4 de este ejemplo, se pueden observar los escenarios en los que fallecerían los miembros 2, 3 o 4. Todos ellos tienen en común que el miembro de 33 años, no recibe nunca más de 34.40€, y es que, tal y como se ha explicado en el párrafo anterior, existe una mayor probabilidad de que este miembro sobreviva al resto, por lo que esperaríamos que cobrase la contribución inicial de cada uno de los otros

miembros aun sobrevivientes. En este sentido, veremos que los pagos por mortalidad de las tontinas son escasos para edades no muy avanzadas, siendo recomendable que este producto sea un complemento de otro que genere un flujo de pagos constante a lo largo de los primeros años de la jubilación y que, a partir de un punto, cubra por ejemplo, el riesgo de sobrevivir a nuestra fuente de ingresos, esto es, vivir más años de los que nuestra pensión tenía previsto.

Otro resultado que conviene mencionar es que, en todas las columnas, la suma de los rendimientos de todos los miembros es 0. Por ejemplo, en la columna 1 tendremos que para $j = 1, -1 + 0.1051 + 0.5673 + 0.3275 = 0$. Esto es lo que nos garantiza que este producto es actuarialmente justo, ya que, la ganancia esperada a lo largo de la vida de la tontina para estos miembros, en comparación con su contribución, es cero.

Ejemplo 2
Cambio en la Contribución del Miembro de 33 años (20,000€)

$$\begin{matrix} -1 & 0.4483 & 0.5687 & 0.5347 \\ 0.1393 & -1 & 0.1133 & 0.1065 \\ 0.4695 & 0.3009 & -1 & 0.3588 \\ 0.3912 & 0.2507 & 0.3180 & -1 \end{matrix}$$

Vemos en el ejemplo 2, que, si bien la probabilidad condicionada de fallecimiento es el parámetro más importante a la hora de establecer los pesos de cada miembro dentro de la tontina, la contribución que hagan también lo es. De esta forma, un individuo de 33 años, a pesar de que muy probablemente sobreviva al resto de individuos del fondo, recibirá pagos mayores que el resto ya que su contribución es también mucho mayor. Por tanto, hemos obtenido un procedimiento de distribución de ganancias en un grupo, que es justo tanto para aquellos miembros de mayor edad, como para aquellos miembros que deciden aportar una cantidad mayor al valor total del fondo.